ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV, PLUHOVÁ 8, 830 00 BRATISLAVA

VZDELÁVACÍ ŠTANDARD S EXEMPLIFIKAČNÝMI ÚLOHAMI Z MATEMATIKY PRE GYMNÁZIUM

štvorročné štúdium

Vypracoval: RNDr. Marian Hanula

Posúdili členovia Ústrednej predmetovej komisie matematiky ŠPÚ

máj 2001

OBSAH

Úvod

Vzdelávacie štandardy z matematiky pre gymnáziá by mali patriť medzi základné pedagogické dokumenty, slúžiace spolu s učebným plánom a učebnými osnovami na riadenie a reguláciu výchovy a vzdelávania v učebnom predmete matematika. Vychodiskom tvorby štandardov boli učebné osnovy matematiky štvorročného gymnaziálneho štúdia, schválené Ministerstvom školstva Slovenskej republiky 24. februára 1997 pod číslom 1252/96-15 s platnosťou od 1. septembra 1997.

Zmyslom vzdelávacích štandardov z matematiky pre 4-ročné gymnáziá je kordinovať v najnutnejšej miere rozsah a úroveň vyučovania tohto predmetu tak, aby sa neobmedzovala osobnosť učiteľa a aby sa neobmedzoval najmä jeho tvorivý prístup k vyučovaniu.

Predkladané štandardy sa nezaoberajú metodikou vyučovania ani jeho časovým harmonogramom, či hodinovou dotáciou jednotlivých tematických celkov. Ich úlohou je opísať požadovanú úroveň a rozsah vedomostí a zručností absolventa gymnázia. Štandardy nezohľadňujú progesivitu a vývojové tendencie jednotlivých tematických celkov, snažia sa len dôsledne mapovať súčasný stav vyučovania matematiky. Autori predpokladajú, že vzdelávacie štandardy z matematiky sa budú pravidelne upravovať, pričom základom úprav budú konkrétne skúsenosti zo stredných a vysokých škôl.

Predložený materiál vychádza z obsahu 4-ročného štúdia matematiky na gymnáziu, ktorý zodpovedá 14 hodinovej dotácii a považujeme ho za základný - mal by ho zvládnuť každý absolvent gymnázia. Okrem úvodu sa tento dokument horizontálne člení na dvanásť tematických okruhov:

1. Výroky a množiny
2. Výrazy
3. Teória čísel
4. Rovnice a nerovnice
5. Funkcie
6. Trigonometria
7. Postupnosti
8. Planimetria
9. Stereometria
10. Analytická geometria
11. Kombinatorika
12. Štatistika a pravdepodobnosť

V obsahovej časti jednotlivých tematických okruhov štandardu sú vymenované prvky obsahu patriace do základného učiva. Je to tá časť učiva z celého gymnaziálneho štúdia matematiky, ktorá do daného tematického okruhu patrí, a ktorá má byť sprístupnená na každej škole všetkým žiakom.

Druhá časť jednotlivých tematických okruhov obsahuje v podobe požiadaviek na vedomosti a zručnosti žiakov tú časť učiva, ktorú si majú osvojiť všetci žiaci, aj keď na kvalitatívne odlišnej úrovni.

Tretiu časť tvoria typové úlohy, ktoré by mali byť ukazovateľom hĺbky pochopenia a zvládnutia učiva žiakom. Riešením týchto úloh preukáže žiak mieru zvládnutia základných myšlienok a zručností. Úlohy testujú aj žiakovu schopnosť identifikovať a formulovať matematický problém úlohy, vyžadujú od žiakov samostatný a tvorivý prístup. Autori predpokladajú, že táto časť sa bude permanentne dopĺňať a inovovať.

Upozorňujeme, že v tomto vzdelávacom štandarde z matematiky nie sú zachytené tie ciele vyučovania matematiky, ktoré konkretizujú oblasť hodnôt a postojov žiakov, nakoľko ich bezprostredná kontrola je zatiaľ didakticky nevyriešená. Bez splnenia takých cieľov, ako je výchova k logickému mysleniu, k presnej formulácii vlastných myšlienok, k vytrvalosti, sústavnosti, presnosti a podobne, by vyučovanie matematiky nesplnilo ciele, ktoré od nej pri výchove a vzdelávaní žiakov gymnázia očakávame.

Učivo matematiky už svojim charakterom neumožňuje vždy jeho presné zaradenie do jednotlivých tematických okruhov a z tohto dôvodu by boli možné presuny medzi okruhmi. Istým nedostatkom tohto materiálu sú aj niektoré deklaratívne, verbálne, či nie celkom korektné formulácie (upraviť, správne chápať, aktívne ovládať, jednoduché úlohy, ...) a preto ich interpretácia môže byť subjektívna.

1. VÝROKY A MNOŽINY

OBSAH

Výrok, pravdivostná hodnota výroku, pravdivý a nepravdivý výrok, hypotéza, jednoduchý a zložený výrok, základné logické spojky (a, alebo, ak-tak, vtedy a len vtedy), negácia výroku. Výroková forma, obor pravdivosti výrokovej formy. Definície a vety.

Negácia, obmena a obrátenie implikácie, základné metódy dôkazov (priamy a nepriamy dôkaz). Existenčný a všeobecný kvantifikátor.

Množina, prvky množiny, základné dva spôsoby určovania množín (vymenovaním prvkov a udaním charakteristickej vlastnosti), podmnožina, rovnosť množín, zjednotenie, prienik, doplnok, základné vlastnosti množinových operácií a ich súvis s logickými spojkami a operátormi. Počet prvkov množiny, prázdna a neprázdna množina, disjunktné množiny, konečná a nekonečná množina, Vennove diagramy.

Intervaly (otvorený, polouzavretý, uzavretý, neohraničený zľava alebo sprava) a operácie s nimi.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

1. 1. Rozoznať, ktoré vety (gramatické) sú výroky

1. 2. Určiť pravdivostnú hodnotu výroku

1. 3. Správne chápať význam logických spojok, určiť pravdivostnú hodnotu *konjunkcie, alternatívy, implikácie* a *ekvivalencie* dvoch výrokov

1. 4. Utvoriť negáciu výroku zloženého z dvoch výrokov

1. 5. Správne chápať výroky, ktoré obsahujú slová *každý, žiadny, aspoň, práve, najviac* a tvoriť ich negácie

1. 6. Utvoriť k danej implikácii jej obmenu, negáciu i obrátenú implikáciu

1. 7. Zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou alebo množinovými operáciami

1. 8. Rozhodnúť, či daný objekt je, alebo nie je prvkom danej množiny

1. 9. Určiť vzťahy medzi množinami (podmnožina, rovnosť) a znázorniť ich pomocou Vennovych diagramov

1.10. Správne interpretovať množinové operácie *zjednotenie, prienik* a *doplnok*

1.11. Určiť zjednotenie a prienik množín i doplnok množiny A vzhľadom na množinu B, ak A je podmnožinou B

1.12. Poznať pojem interval, jeho zápis, ovládať množinové operácie s intervalmi a dokázať ich pohotovo používať

1.13. Rozlišovať a chápať pojmy *definícia, axióma, veta*

2. VÝRAZY

OBSAH

Číslo, číslica, konštanta, premenná, znaky operácií, výraz. Prepis slovného textu, tvorenie výrazov. Výrazy s reálnymi číslami, výrazy s konštantami a premennými, hodnota výrazu. Obor premennej a obor definície výrazu.

Mnohočlen, koeficient, stupeň a hodnota mnohočlena. Operácie s mnohočlenmi. Mnohočlen, rozklad mnohočlena na súčin a koreňový činiteľ.

Výrazy s neznámou v menovateli (algebrické) zlomky, výrazy s mocninami, odmocninami, faktoriálmi a kombinačnými číslami, výrazy s hodnotami logaritmickej funkcie, s hodnotami goniometrických funkcií, výrazy s absolútnou hodnotou. Úpravy výrazov.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

2.1. Tvoriť výrazy, zapísať slovný text pomocou konštánt, premenných a znakov operácií

2.2. Vyjadriť slovami obsah jednoduchého textu zapísaného matematickou symbolikou

2.3. Vyčísliť (upravovať) výrazy s reálnymi číslami

2.4. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmu *mnohočlen, člen, koeficient* a *stupeň mnohočlena*

2.5. Sčítať, odčítať, násobiť mnohočleny, vydeliť mnohočlen lineárnym dvojčlenom (koreňovým činiteľom)

2.6. Určiť obor definície výrazu a vyčísliť jeho hodnotu pre konkrétne reálne číslo

2.7. Poznať vzorce $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$, využiť ich pri úpravách výrazov

2.8. Upraviť výrazy s mocninami a odmocninami, s faktoriálmi, upraviť výrazy obsahujúce hodnoty funkcií *sin, cos, tg, cotg* a *log* i výrazy s absolútnou hodnotou

3. TEÓRIA ČÍSEL

OBSAH

Prirodzené číslo a jeho zápis. Deliteľ, násobok, deliteľnosť, znaky deliteľnosti, prvočíslo, zložené číslo, prvočíselný rozklad, najmenší spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ a vzťah medzi nimi, základné vlastnosti deliteľnosti.

Množina prirodzených, celých, racionálnych a reálnych čísel. Základné operácie v jednotlivých číselných oboroch. Zobrazenie množiny reálnych čísel.

Mocniny s prirodzeným, celým, racionálnym a reálnym mocniteľom, odmocniny a základné pravidlá počítania s nimi.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

3. 1. Rozoznať pojmy *číslo* a *číslica (cifra)*

3. 2. Definovať deliteľnosť prirodzených čísel a overovať deliteľnosť konkrétnych čísel

3. 3. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmu *prvočíslo, zložené číslo, deliteľ, násobok, súdeliteľné* a *nesúdeliteľné čísla, ciferný súčet*

3. 4. Sformulovať pravidlá deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 a 10

3. 5. Aplikovať poznatky o deliteľnosti pri vytváraní prvočíselných rozkladov zložených čísel využívajúc poznatok, že ak sa súčin deliteľov p_1, p_2 prirodzeného čísla n rovná tomuto číslu, tak aspoň jeden z deliteľov p_1, p_2 je $\leq \sqrt{n}$

3. 6. Určiť najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel

3. 7. Rozoznať na konkrétnych číslach konečný a nekonečný desatinný rozvoj reálneho čísla, nekonečný periodický rozvoj, racionálne a iracionálne číslo

3. 8. Znázorniť reálne číslo na číselnej osi

3. 9. Definovať racionálne číslo a zapísať ho aspoň dvoma spôsobmi

3.10. Napísať desatinné číslo v rozvinutom i skrátenom tvare, určiť jeho rád

3.11. Definovať absolútnu hodnotu reálneho čísla a vysvetliť jej geometrický význam

3.12. Definovať mocninu s prirodzeným mocniteľom a dokázať základné pravidlá počítania s týmito mocninami

3.13. Definovať mocninu s celočíselným a racionálnym mocniteľom

3.14. Definovať odmocninu a vysvetliť vzťah medzi mocninami a odmocninami

3.15. Riešiť jednoduché úlohy využívajúce operácie s mocninami s celočíselným, racionálnym i reálnym mocniteľom

4. ROVNICE A NEROVNICE

OBSAH

Rovnica (ako výroková forma), neznáma, koeficienty, obor rovnice, koreň rovnice, riešenie rovnice (ako postup), množina riešení rovnice, dôsledková a ekvivalentná úprava, skúška správnosti, nerovnica (ako výroková forma).

Lineárna rovnica, grafické a algebrické riešenie lineárnej rovnice. Lineárna nerovnica, grafické a algebrické riešenie lineárnej nerovnice. Lineárne rovnice a nerovnice s parametrom. Sústava lineárnych rovníc s 2, 3 a *n* neznámymi, sústavy lineárnych rovníc s parametrom.

Rovnice a nerovnice v súčinovom a podielovom tvare, rovnice a nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote.

Kvadratická rovnica, riešenie úpravou na štvorec, vzorec na riešenie kvadratickej rovnice. Počet koreňov a jeho súvis s diskriminantom, vplyv koreňov na tvar koreňových činiteľov, vzťah koreňov a koeficientov. Kvadratická nerovnica a jej riešenie. Súvis kvadratickej rovnice a nerovnice s grafom príslušnej kvadratickej funkcie. Kvadratické rovnice s parametrom, rovnice s neznámou v menovateli a odmocnenci.

Goniometrické rovnice, základné goniometrické nerovnice. Súvis riešenia goniometrickej rovnice s jednotkovou kružnicou a grafom príslušnej goniometrickej funkcie.

Exponenciálne a logaritmické rovnice. Súvis vlastností exponenciálnych a logaritmických funkcií s riešením exponenciálnych a logaritmických rovníc.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

4.1 Všeobecné vedomosti

4.1.1 Ovládať pojmy *neznáma, koeficient, obor rovnice, obor nerovnice, množina všetkých koreňov*

4.1.2 Vysvetliť, aký je rozdiel medzi dôsledkovou a ekvivalentnou úpravou rovnice a nerovnice

4.1.3 Uplatniť poznatok, že pri dôsledkovej úprave je skúška súčasťou riešenia

4.1.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmu *parameter* v rovnici a nerovnici, vyriešiť jednoduchú rovnicu a nerovnicu s jedným parametrom, vykonať diskusiu riešenia vzhľadom na parameter

4.1.5 Vykonať rozbor slovnej úlohy vedúcej k rovniciam, nerovniciam a ich sústavám (matematizácia slovnej úlohy), overiť výsledky a interpretovať ich s ohľadom na pôvodnú úlohu

4.1.6 Použiť metódu substitúcie pri riešení rovníc i nerovníc

4.2 Lineárne rovnice, nerovnice

4.2.1 Využiť ekvivalentné úpravy pri vyjadrení neznámej zo vzorca

4.2.2 Využiť ekvivalentné úpravy pri riešení lineárnych rovníc a nerovníc s jednou neznámou

4.2.3 Správne postupovať pri riešení rovníc a nerovníc s neznámou v menovateli

4.2.4 Riešiť jednoduché typy rovníc s neznámou v odmocnenci

4.2.5 Riešiť jednoduché typy rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou

4.2.6 Zapísať riešenie nerovnice pomocou intervalov

4.2.7 Poznať riešenie nerovnice $|x - a| < \varepsilon$

4.2.8 Správne riešiť jednotlivé typy rovníc a nerovníc aj v podmnožinách množiny R

4.2.9 Ilustrovať na príkladoch geometrickú interpretáciu lineárnej nerovnice s 2 neznámymi

4.3 Sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

4.3.1 Efektívne riešiť sústavu 2 (3) lineárnych rovníc s 2 (3) neznámymi

4.3.2 Poznať grafické znázornenie sústavy 2 lineárnych rovníc s 2 neznámymi a chápať geometrický význam jej riešenia

4.3.3 Správne riešiť jednoduché typy nerovníc v súčinovom a podielovom tvare

4.3.4 Graficky znázorniť riešenie sústavy lineárnych nerovníc s 2 neznámymi

4.4 <u>Kvadratické rovnice a nerovnice</u>

4.4.1 Efektívne riešiť všetky typy kvadratických rovníc

4.4.2 Poznať a aplikovať vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice

4.4.3 Poznať úlohu *diskriminantu* kvadratickej rovnice

4.4.4 Rozložiť na súčin kvadratický trojčlen

4.4.5 Poznať a využívať súvis medzi riešením kvadratickej nerovnice a grafom kvadratickej funkcie

4.4.6 Správne riešiť sústavu lineárnej a kvadratickej rovnice s 2 neznámymi

4.5 <u>Goniometrické rovnice a nerovnice</u>

4.5.1 Riešiť základné goniometrické rovnice v R

4.5.2 Vysvetliť postup pri riešení zložitejších goniometrických rovníc, pri riešení aplikovať goniometrické vzorce a vlastnosti goniometrických funkcií

4.5.3 S použitím jednotkovej kružnice alebo grafu funkcie vyriešiť jednoduché goniometrické nerovnice

4.6 <u>Exponenciálne a logaritmické rovnice</u>

4.6.1 Správne riešiť základné exponenciálne a logaritmické rovnice

4.6.2 Aplikovať vlastností exponenciálnych a logaritmických funkcií (prostosť a monotónnosť) pri riešení exponenciálnych a logaritmických rovníc

4.6.3 Vysvetliť riešenie exponenciálnej rovnice pomocou jej logaritmovania

5. FUNKCIE

OBSAH

Funkčná závislosť, funkcia ako predpis (priradenie), vlastnosti funkcií, zložená funkcia.

Lineárna funkcia, obor definície a obor hodnôt, graf, nulový bod. Monotónnosť a ohraničenosť lineárnej funkcie, konštantná funkcia. Funkcia $y = |x|$, jej graf a základné vlastnosti. Priama úmernosť.

Kvadratická funkcia a jej graf (parabola, vrchol a os paraboly), nulové body kvadratickej funkcie, monotónnosť a ohraničenosť. Grafy kvadratickej funkcie s absolútnou hodnotou. Súvis kvadratickej rovnice a nerovnice s grafom príslušnej kvadratickej funkcie.

Definícia mocniny s prirodzeným (celočíselným) exponentom, grafy mocninových funkcií. Prostá a inverzná funkcia, definícia odmocniny. Nepriama úmernosť, lineárna lomená funkcia, vzťahy medzi grafmi funkcií $y = \frac{k}{x-a} + b$ a $y = \frac{K}{x}$. Graf ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie (aj s absolútnou hodnotou), určenie asymptot (intuitívne pojem limity v nevlastnom bode).

Goniometrické funkcie ostrého uhla, goniometrické funkcie ľubovoľného uhla (na jednotkovej kružnici). Grafy a základné vlastnosti goniometrických funkcií, ich periodičnosť. Súmernosti na jednotkovej kružnici ako zdroj objavovania ďalších vlastností týchto funkcií, súčtové vzorce, vzorce pre polovičný a dvojnásobný uhol. Grafy funkcií typu $y = a \cdot f(bx + c) + d$, grafy funkcií s absolútnymi hodnotami. Inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám (intuitívne - hľadanie veľkosti uhla k danej hodnote funkcie).

Mocniny s reálnym exponentom, definícia exponenciálnej funkcie, jej základné vlastnosti. Vplyv základu na priebeh exponenciálnej funkcie, graf exponenciálnej funkcie, funkcia $y = e^x$. Logaritmická funkcia ako funkcia inverzná k exponenciálnej, jej vlastnosti. Dekadický a prirodzený logaritmus, základné vlastnosti logaritmov. Používanie dekadických logaritmov pri zjednodušovaní numerických výpočtov.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

5.1 Všeobecné vedomosti

5.1.1 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *funkcia, predpis funkcie, obor definície* a *obor hodnôt, argument, funkčná hodnota* a *graf funkcie*

5.1.2 Rozoznať v slovnom texte funkčnú závislosť a matematicky ju sformulovať

5.1.3 Určiť (aspoň z grafu funkcie) vlastnosti funkcie (*monotónnosť, lokálne extrémy, párnosť* a *nepárnosť, ohraničenosť, periodičnosť*)

5.1.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch princíp vytvorenia inverznej funkcie k prostej funkcii a aplikovať ho na jednoduché funkcie (lineárne, kvadratické, exponenciálne)

5.1.5 Načrtnúť, na základe poznania grafu funkcie $y = f(x)$, grafy funkcií $y = -f(x)$, $y = f(x) + k$,

$y = |f(x)|$, $y = f(x + q)$, $y = f(x + q) + k$

5.2 Lineárna funkcia

5.2.1 Definovať lineárnu funkciu, poznať jej obor definície a obor hodnôt

5.2.2 Načrtnúť graf funkcie $y = kx + q$ na základe poznania geometrického významu parametrov k, q

5.2.3 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

5.2.4 Rozhodnúť o monotónnosti lineárnej funkcie podľa hodnoty parametra k

5.2.5 Nájsť predpis lineárnej funkcie, ak sú dané jej body

5.2.6 Zostrojiť graf lineárnej funkcie s absolútnymi hodnotami

5.3 Kvadratická funkcia

5.3.1 Definovať kvadratickú funkciu, poznať jej obor definície a obor hodnôt

5.3.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

5.3.3 Vysvetliť geometrický význam parametrov *a, c* v súvislosti s grafmi funkcií $y = x^2$ a $y = ax^2 + bx + c$

5.3.4 Nájsť vrchol a os paraboly, ktorá je grafom kvadratickej funkcie, určiť jej nulové body a načrtnúť ju

5.3.5 Určiť, podľa načrtnutého grafu, obor hodnôt a intervaly monotónnosti

5.3.6 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch súvislosť medzi hodnotou diskriminantu kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$

5.4 <u>Lineárna lomená funkcia</u>

5.4.1 Definovať lineárnu lomenú funkciu, opísať vzťah medzi lineárnou lomenou funkciou a nepriamou úmernosťou

5.4.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

5.4.3 Určiť obor definície ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

5.4.4 Určiť nulové body grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

5.4.5 Určiť asymptoty grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

5.5 <u>Mocninová funkcia</u>

5.5.1 Definovať mocninovú funkciu ($y = x^n$, n $\in$ Z), poznať jej obor definície

5.5.2 Opísať na konkrétnych príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s párnym (nepárnym) *n*

5.5.3 Opísať na konkrétnych príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s kladným (záporným) *n*

5.6 <u>Exponenciálna a logaritmická funkcia</u>

5.6.1 Definovať exponenciálnu funkciu, poznať jej obor definície a obor funkčných hodnôt

5.6.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

5.6.3 Opísať na konkrétnych príkladoch súvislosť priebehu exponenciálnej funkcie s hodnotou jej základu *a*, s pomocou význačných bodov načrtnúť jej graf

5.6.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch vzájomnú súvislosť exponenciálnej a logaritmickej funkcie ako funkcií navzájom inverzných

5.6.5 Definovať logaritmus a opísať pravidlá logaritmovania súčinu, podielu, mocniny a odmocniny

5.6.6 Aplikovať pravidlá logaritmovania pri logaritmovaní i odlogaritmovaní výrazov

5.7 <u>Goniometrické funkcie</u>

5.7.1 Definovať goniometrické funkcie *sínus, kosínus, tangens* a *kotangens*, poznať ich definičné obory, obory hodnôt, grafy a periódy

5.7.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

5.7.3 Načrtnúť graf goniometrickej funkcie tvaru $y = a \,.f\,(bx + c) + d$

5.7.4 Aktívne ovládať vzorce: $sin^2 x + cos^2 x = 1$, $tg\, x \,.\, cotg\, x = 1$,

$$sin(x + y) = sin\, x.cos\, y + cos\, x.sin\, y,$$

$$cos(x + y) = cos\, x.cos\, y - sin\, x.sin\, y,$$

6. TRIGONOMETRIA

OBSAH

Aplikácia poznatkov o goniometrických funkciách pri odvodzovaní vzťahov medzi stranami, uhlami (sínusová a kosínusová veta), výškami a ťažnicami trojuholníka. Vzťah medzi polomerom kružnice opísanej (vpísanej) trojuholníku a prvkami trojuholníka.

Odvodenie vzorcov na výpočet obsahu trojuholníka.

Riešenie jednoduchých trigonometrických úloh (z daných prvkov trojuholníka počítať ostatné prvky), aplikácia uvedených poznatkov v rôznych častiach matematiky (napríklad trigonometrické riešenie trojuholníka daného stranami a, c a uhlom β), fyziky i pri riešení jednoduchých (štylizovaných) úloh z praxe (kartografia, geodézia, meteorológia, kozmonautika, ...).

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

6.1. Riešiť pravouhlý trojuholník pomocou goniometrických funkcií ostrého uhla

6.2. Riešiť všeobecný trojuholník pomocou sínusovej a kosínusovej vety

6.3. Vyjadriť pomocou goniometrických funkcií výšky trojuholníka, polomer kružnice trojuholníku vpísanej a opísanej, i obsah trojuholníka

6.4. Aplikovať poznatky o goniometrických funkciách a o vzťahoch medzi prvkami trojuholníka v rôznych častiach matematiky, fyziky i pri riešení jednoduchých praktických trigonometrických úloh

7. POSTUPNOSTI

OBSAH

Postupnosť, spôsoby jej určenia (vrátane rekurentného). Monotónnosť, ohraničenosť a graf postupnosti, limita postupnosti (intuitívne).

Aritmetická a geometrická postupnosť, diferencia a kvocient, súčet prvých n členov postupnosti. Aplikácia poznatkov o postupnostiach pri riešení slovných úloh.

Nekonečný rad, čiastočný súčet, nekonečný geometrický rad a jeho súčet (intuitívne).

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

7.1. Charakterizovať na konkrétnych príkladoch obsah pojmu postupnosť a člen postupnosti, konečná a nekonečná postupnosť

7.2. Vysvetliť pomocou konkrétnych príkladov spôsoby určenia postupnosti (vzorcom pre *n*-tý člen i rekurentne)

7.3. Určiť ľubovoľný člen postupnosti a načrtnúť jej graf

7.4. Zistiť experimentálne a dôkazom potvrdiť (v jednoduchých prípadoch) hypotézy o monotónnosti a ohraničenosti daných postupností

7.5. Chápať pojem limita postupnosti a intuitívne rozhodnúť, či postupnosť má alebo nemá limitu

7.6. Rozhodnúť, či daná postupnosť je aritmetická, geometrická alebo iná

7.7. Aktívne ovládať základné vzťahy aritmetickej i geometrickej postupnosti

7.8. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *nekonečný rad* a *súčet nekonečného radu*. V jednoduchých prípadoch určiť postupnosť čiastočných súčtov

7.9. Aplikovať poznatky o postupnostiach v praktických úlohách, poznať najmä aplikáciu geometrickej postupnosti v situáciách s pravidelným rastom či poklesom veličín (úrokovanie, pôžičky, splátky, ...)

8. PLANIMETRIA

OBSAH

Základné útvary v rovine, polpriamka, uhol, polrovina, dvojice uhlov, pravý uhol, incidencia, rovnobežnosť. Konvexné a nekonvexné útvary, trojuholník, štvoruholníky, konvexné *n*-uholníky, kružnica.

Zhodnosť trojuholníkov, vety o zhodnosti trojuholníkov, vzťahy medzi stranami a uhlami. Ťažnica, výška, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku, ťažisko, priesečník výšok.

Základné polohové vzťahy a jednoduché metrické úlohy, uhly v kružnici, stredový, obvodový uhol a vzťahy medzi nimi, Talesova veta.

Uhly v pravidelnom *n*-uholníku, podobnosť trojuholníkov, vety o podobnosti trojuholníkov, pomer obvodov a obsahov podobných trojuholníkov, Euklidove a Pytagorova veta.

Obsahy rovinných útvarov, pravidelných *n*-uholníkov, štvoruholníkov, obvod a obsah kruhu i jeho častí.

Množiny bodov danej vlastnosti, kružnica a dotyčnica kružnice.

Konštrukčné úlohy, rozbor, počet riešení.

Vzťahy medzi stranami a uhlami trojuholníka, vyjadrenie prvkov trojuholníka (výška, ťažnica, polomer opísanej a vpísanej kružnice), obsah trojuholníka a vzorce na jeho výpočet.

Zhodné a podobné zobrazenia v rovine (*osová* a *stredová súmernosť, otáčanie, posúvanie, identita, rovnoľahlosť*), obraz úsečky, priamky, *n*-uholníka a kružnice v jednotlivých zobrazeniach, samodružné body a útvary, stred a os súmernosti útvaru. Skladanie osových súmerností. Rovnoľahlosť, rovnoľahlosť kružníc. Konštrukčné úlohy riešené pomocou geometrických zobrazení.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

8.1 Základné vedomosti (pojmy)

8.1. 1 Poznať základné geometrické útvary v rovine (*bod, priamka, rovina*) a na konkrétnych príkladoch opísať vzťahy medzi nimi

8.1. 2 Definovať geometrické útvary (*úsečka, uhol, rovinný pás, trojuholník, štvoruholník, konvexný n-uholník, kružnica, kruh*) pomocou množinových operácií alebo pomocou charakteristickej vlastnosti

8.1. 3 Aktívne ovládať pojmy *uhol, veľkosť uhla* (v stupňovej i oblúkovej miere), *orientovaný uhol*

8.1. 4 Rozoznať dvojice uhlov (*styčné, doplnkové, susedné, striedavé*) a tieto poznatky aktívne využívať pri výpočtových úlohách o veľkostiach uhlov

8.1. 5 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *obvodový* a *stredový uhol*, sformulovať vetu o ich vzťahu.

8.1. 6 Interpretovať Talesovu vetu ako dôsledok vety o stredovom a obvodovom uhle

8.1. 7 Rozlíšiť *konvexný* a *nekonvexný* geometrický útvar

8.1. 8 Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch priamok

8.1. 9 Klasifikovať vzájomnú polohu priamky a kružnice i vzájomnú polohu dvoch kružníc

8.1.10 Klasifikovať trojuholníky

8.1.11 Klasifikovať štvoruholníky

8.1.12 Aktívne ovládať vety o určenosti trojuholníka, vety o stranách a uhloch v trojuholníku, poznať *ťažnice, výšky, stredné priečky, kružnicu vpísanú* a *opísanú* trojuholníku, ich definície a vlastnosti

8.1.13 Aktívne ovládať pojmy *štvoruholník, rovnobežník* (*štvorec, kosoštvorec, kosodĺžnik, obdĺžnik*), *lichobežník*, poznať vlastnosti strán, uhlov a uhlopriečok v štvoruholníku

8.1.14 Aktívne ovládať pojmy *mnohouholník, počet uhlopriečok, pravidelný n-uholník*, *súčet vnútorných uhlov*

8.1.15 Aktívne ovládať pojmy *kružnica, kruh, tetiva, oblúk, odsek, výsek, medzikružie*

8.1.16 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *odchýlka dvoch priamok, vzdialenosť bodu od priamky* a *vzdialenosť dvoch rovnobežiek*

8.1.17 Zistiť (vypočítať) obsahy a obvody trojuholníkov, štvoruholníkov, pravidelných *n*-uholníkov, kruhu a jeho častí

8.1.18 Riešiť aplikované úlohy pomocou trigonometrie

8.2 Zobrazenia

8.2.1 Chápať pojem *geometrické zobrazenie*, definovať podobné a zhodné zobrazenie v rovine

8.2.2 Využívať vety o podobnosti a zhodnosti trojuholníkov pri výpočtoch prvkov geometrických útvarov

8.2.3 Sformulovať Euklidove a Pytagorovu vetu

8.2.4 Vysvetliť pojem *súmernosť rovinných útvarov*

8.2.5 Určiť stredy rovnoľahlosti dvoch kružníc

8.3 <u>Konštrukčné úlohy</u>

8.3. 1 Zostrojiť os úsečky, uhla a pásu, os uhlov dvoch rôznobežiek

8.3. 2 Zostrojiť množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od danej priamky

8.3. 3 Zostrojiť množinu všetkých stredov kružníc s daným polomerom, ktoré sa dotýkajú danej kružnice

8.3. 4 Zostrojiť úsečku s dĺžkou vyjadrenou druhou odmocninou prirodzeného čísla

8.3. 5 Zostrojiť dotyčnicu kružnice v jej bode i dotyčnicu prechádzajúcu daným bodom

8.3. 6 Zostrojiť množinu vrcholov všetkých uhlov s rovnakou veľkosťou, ktorých ramená prechádzajú danými bodmi

8.3. 7 Aplikovať v konštrukčných úlohách vedomosti o trojuholníku, jeho ťažniciach, ťažisku, výškach, kružnici vpísanej a opísanej

8.3. 8 Zostrojiť v danom zhodnom zobrazení alebo v rovnoľahlosti obraz bodu, priamky, mnohouholníka a kružnice

8.3. 9 Aplikovať v konštrukčných úlohách vedomosti o zhodných a podobných zobrazeniach

8.3.10 Riešiť jednoduché konštrukčné úlohy, zostrojiť trojuholník, rovnobežník, lichobežník a kružnicu použitím množín bodov danej vlastnosti

9. STEREOMETRIA

OBSAH

Základné útvary v priestore, bod, priamka, rovina, vzájomná poloha dvoch priamok, rovnobežnosť priamok, vzájomná poloha priamky a roviny, dvoch rovín, vzájomná poloha troch rovín.

Základy voľného rovnobežného premietania.

Kolmosť, priamka kolmá na rovinu, kolmosť rovín.

Telesá, hranol, kolmý hranol, ihlan, štvorsten, pravidelné a rotačné telesá (valec, kužeľ, guľa).

Vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť bodu od priamky.

Odchýlka dvoch priamok, kolmý priemet priamky do roviny, odchýlka priamky a roviny, odchýlka dvoch rovín, kolmosť rovín.

Objemy a povrchy hranatých aj rotačných telies, vlastnosti objemu.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

9.1. Polohové vlastnosti priamok a rovín

9.1.1 Vymenovať základné geometrické útvary v priestore (*bod, priamka, rovina*) a definovať vzťahy medzi nimi

9.1.2 Aktívne ovládať základné stereometrické vety

9.1.3 Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch priamok

9.1.4 Klasifikovať vzájomnú polohu priamky a roviny

9.1.5 Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch rovín

9.1.6 Klasifikovať vzájomnú polohu troch rovín

9.1.7 Využiť základné vety stereometrie a poznatky o vzájomnej polohe priamok a rovín pri konštrukcii priesečnice dvoch rovín, priesečníka priamky s rovinou, pri konštrukcii rovinného rezu hranola a ihlana i pri konštrukcii priesečníka priamky a hranola

9.2. Metrické vlastnosti priamok a rovín

9.2.1 Definovať kolmosť priamok a rovín. Rozhodnúť o kolmosti priamok a rovín použitím kritérií o kolmosti

9.2.2 Definovať a na konkrétnych príkladoch demonštrovať obsah pojmov *odchýlka dvoch priamok, odchýlka priamky a roviny, odchýlka dvoch rovín*. Určiť (konštrukčne aj výpočtom) a znázorniť v jednoduchých prípadoch odchýlky priamok a rovín.

9.2.3 Definovať a na konkrétnych príkladoch demonštrovať obsah pojmov *vzdialenosť bodu od priamky, vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín*. Určiť (konštrukčne aj výpočtom) a v jednoduchých prípadoch aj znázorniť tieto vzdialenosti.

9.2.4 Zostrojiť skutočnú veľkosť rovinného rezu kolmého hranola a pravidelného ihlana

9.3. Mnohosteny a rotačné telesá

9.3.1 Zobraziť jednoduché telesá vo voľnom rovnobežnom premietaní

9.3.2 Charakterizovať základné mnohosteny a rotačné telesá (*kocka, kváder, hranol, ihlan, zrezaný ihlan, rotačný valec, kužeľ, zrezaný kužeľ, guľa, guľová plocha* a jej časti - *odsek, výsek, vrstva, vrchlík, pás*)

9.3.3 Zhotoviť siete a modely kocky, kvádra, pravidelného hranola a ihlana, rotačného valca a kužeľa

9.3.4 Vypočítať objem a povrch kocky, kvádra, hranola, ihlana, rotačného valca a kužeľa, zrezaného ihlana a kužeľa, gule a jej častí

10. ANALYTICKÁ GEOMETRIA

OBSAH

Karteziánska sústava súradníc na priamke, v rovine priestore. Bod a jeho súradnice. Stred úsečky a jeho súradnice, vzdialenosť dvoch bodov (dĺžka úsečky).

Definícia vektora, umiestnenie vektora (voľný a viazaný vektor). Grafická interpretácia sčítania a odčítania vektorov, nulový vektor. Násobenie vektora reálnym číslom, lineárna kombinácia vektorov. Kolineárnosť a komplanárnosť bodov vyjadrená pomocou vektorov.

Súradnice a veľkosť vektora, odchýlka vektorov a ich skalárny súčin.

Analytické vyjadrenie priamky v rovine i priestore (parametrické vyjadrenie, všeobecný a smernicový tvar), smerový a normálový vektor priamky, smernica a smerový uhol priamky. Vzájomná poloha bodu a priamky, vzájomná poloha dvoch priamok, odchýlka priamok, vzdialenosť bodu od priamky (v rovine).

Analytické vyjadrenie roviny (parametrické vyjadrenie, všeobecný tvar), normálový vektor roviny. Vzájomná poloha bodu a roviny, priamky a roviny, vzájomná poloha dvoch a troch rovín. Odchýlka priamky a roviny, odchýlka dvoch rovín, vzdialenosť bodu od roviny. Kolmica na rovinu.

Analytické vyjadrenie úsečky, polpriamky, polroviny a polpriestoru.

Rovnica kružnice (stredový i posunutý tvar). Vzájomná poloha bodu a kružnice, vzájomná poloha priamky a kružnice. Rovnica dotyčnice v ľubovoľnom bode kružnice, rovnica dotyčnice prechádzajúcej bodom mimo kružnice.

Riešenie geometrických úloh metódami analytickej geometrie, voľba vhodnej sústavy súradníc, transformácia geometrickej úlohy na aritmetický (algebrický) problém a spätná transformácia výsledkov do geometrie.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

10.1. <u>Vektorová algebra</u>

10.1. 1 Vysvetliť, opísať a na konkrétnom príklade demonštrovať zavedenie súradnicovej sústavy na priamke, v rovine a priestore

10.1. 2 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *vektor* a *umiestnenie vektora*

10.1. 3 Interpretovať geometricky *súčet* a *rozdiel vektorov, súčin reálneho čísla a vektora, lineárnu kombináciu vektorov*

10.1. 4 Vypočítať súradnice vektora určeného dvojicou bodov

10.1. 5 Vypočítať súradnice súčtu a rozdielu vektorov, súčinu vektora a reálneho čísla, lineárnej kombinácie vektorov

10.1. 6 Definovať pojem *skalárny súčin vektorov*

10.1. 7 Určiť skalárny súčin vektorov

10.1. 8 Určiť odchýlku dvoch vektorov

10.1. 9 Určiť vektor rovnobežný s daným vektorom

10.1.10 Určiť vektor kolmý na daný vektor

10.2. <u>Lineárne útvary</u>

10.2. 1 Vypočítať súradnice stredu úsečky

10.2. 2 Vypočítať vzdialenosť dvoch bodov

10.2. 3 Vysvetliť pojmy *smerový uhol priamky*, *smerový* a *normálový vektor priamky, normálový vektor roviny*

10.2. 4 Napísať aspoň jedno analytické vyjadrenie priamky danej dvoma bodmi

10.2. 5 Opísať súvis medzi smernicovým vyjadrením priamky a lineárnou funkciou

10.2. 6 Napísať aspoň jedno analytické vyjadrenie roviny danej tromi bodmi

10.2. 7 Určiť súradnice bodu, ktorý leží (neleží) na danej úsečke, priamke, či v danej rovine

10.2. 8 Zistiť vzájomnú polohu dvoch priamok a určiť ich prienik

10.2. 9 Zistiť vzájomnú polohu priamky a roviny a určiť ich prienik

10.2.10 Zistiť vzájomnú polohu dvoch rovín

10.2.11 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a s danou priamkou je rovnobežná

10.2.12 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a na danú priamku je kolmá

10.2.13 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a s danou rovinou je rovnobežná

10.2.14 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a na danú rovinu je kolmá

10.2.15 Určiť analytické vyjadrenie roviny, ktorá prechádza daným bodom a s danou rovinu je rovnobežná

10.2.16 Vypočítať vzdialenosť bodu od priamky (v rovine)

10.2.17 Vypočítať odchýlku dvoch priamok

10.2.18 Vypočítať odchýlku dvoch rovín

10.2.19 Vypočítať vzdialenosť bodu od roviny

10.2.20 Vypočítať odchýlku priamky od roviny

10.3. Kvadratické útvary

10.3.1 Napísať analytické vyjadrenie kružnice danej stredom a polomerom

10.3.2 Určiť charakteristické prvky kružnice z jej analytického vyjadrenia

10.3.3 Klasifikovať analytickou metódou vzájomnú polohu priamky a kružnice

10.3.4 Určiť rovnicu dotyčnice kružnice v jej ľubovoľnom bode

10.3.5 Určiť rovnicu dotyčnice kružnice prechádzajúcu bodom mimo kružnice

10.3.6 Určiť rovnicu kružnice opísanej danému trojuholníku

11. KOMBINATORIKA

OBSAH

Kombinatorické pravidlo súčtu a súčinu, permutácie (poradia), variácie, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník. Základné vlastnosti kombinačných čísel a Pascalovho trojuholníka.

Binomická veta. Variácie s opakovaním.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

11.1. Riešiť jednoduché kombinatorické úlohy systematickým vypísaním všetkých možností s využitím vhodného organizačného princípu

11.2. Riešiť zložitejšie kombinatorické úlohy rozložením na jednoduchšie podúlohy využitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu, či pomocou základných vzorcov pre počet variácií, permutácií a kombinácií

11.3. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *permutácie*, *variácie* (aj s opakovaním) a *kombinácie*

11.4. Vysvetliť spôsob vyjadrenia počtu permutácií, variácii a kombinácií pomocou faktoriálov

11.5. Vyčísliť hodnotu konkrétneho kombinačného čísla buď priamo z definície alebo pomocou vlastností Pascalovho trojuholníka

11.6. Sformulovať a aktívne ovládať binomickú vetu

12. ŠTATISTIKA A PRAVDEPODOBNOSŤ

OBSAH

Štatistický súbor, znak, rozsah súboru, absolútna a relatívna početnosť. Priemerná hodnota, aritmetický, geometrický, harmonický a vážený priemer. Modus, medián, rozptyl, smerodajná odchýlka. Tabuľka rozdelenia početnosti, histogram.

Jav, pravdepodobnosť javu, náhodný, istý, nemožný a opačný jav.

POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI

12.1. Charakterizovať na konkrétnych príkladoch pojmy *štatistický súbor*, *štatistická jednotka* a *znak*. Určiť rozsah daného štatistického súboru

12.2. Vykonať triedenie štatistického súboru podľa daného znaku. Určiť absolútne a relatívne početnosti znakov (tried) a zostaviť tabuľku početnosti. Graficky znázorniť rozdelenie početnosti

12.3. Vypočítať priemer, vážený priemer, modus, medián, rozptyl a smerodajnú odchýlku. Určiť geometrický priemer.

12.4. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *náhodný jav, istý jav, nemožný jav, opačný jav*

12.5. Aplikovať základný vzorec na výpočet pravdepodobnosti pre javy, ktorých počet je možné určiť jednoduchým výpočtom alebo kombinatorickou úvahou

POŽIADAVKY S EXEMPLIFIKAČNÝMI ÚLOHAMI

1. Výroky a množiny

1.1. Rozoznať, ktoré vety (gramatické) sú výroky.

-

1) Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výrokmi. Pri výrokoch určte aj ich pravdivostnú hodnotu.

   a) $5 . 3 + 12 > 26$

   b) Obsah kruhu s polomerom r je $2pr$.

   c) Žilinský kraj.

   d) $2x + 3 < 0$

   e) Pre každé reálne číslo x platí, že $0 . x = 0$

   f) Pre každé reálne číslo x platí, že $0 . x = 5$

2) Ktoré z nasledujúcich viet možno považovať za výroky?

   a) Bratislava je hlavné mesto SR.

   b) Žilina je hlavné mesto Poľska.

   c) Riešte nerovnicu!

   d) Existuje snežný muž Yetti.

   e) Základy matematickej logiky.

   f) Ktoré čísla sú deliteľmi nuly?

   g) Narysuj pravouhlý trojuholník, ak sú dané jeho odvesny.

   h) Susedné strany pravouholníka sú zhodné.

   i) Existuje pravouholník, ktorého susedné strany sú zhodné.

   j) V každom pravouholníku sú každé dve susedné strany zhodné.

   k) Nie je tu.

   l) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

1.2. Určiť pravdivostnú hodnotu výroku.

1) Nech a, b, c sú ľubovoľné prirodzené čísla. Ktoré z nasledujúcich tvrdení je nepravdivé?

   A Ak $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$, tak aj $a \mid c$.

   B Ak $a \mid (b + c)$ a zároveň $a \mid b$, tak aj $a \mid c$.

   C Ak $a \mid b$ a zároveň $a \mid c$, tak aj $a \mid (2b + c)$.

   D Ak $a \mid b$ a zároveň $b \mid a$, tak sa $a = b$.

   E Ak $a \mid (b . c)$ a zároveň $a \mid b$, tak aj $a \mid c$.

2) Nech $m = 2^3.3^2.7$, $n = 5^2.7.17$. Ktoré z uvedených tvrdení o číslach *m, n* je nepravdivé?

A *m* a *n* sú zložené čísla

B Čísla *m, n* majú spoločného deliteľa

C Číslo *n* je deliteľné číslom 35

D $2^4.3^2.7.19$ je násobkom čísla *m*

E Najmenším spoločným násobkom čísel *m* a *n* je $2^3.3^2.5^2.7^2.17$

3) Určte pravdivostnú hodnotu zápisov pre určené hodnoty premennej *x*:

a) $x = 0 \vee x > 5$ pre $x \in \{0, 1, 5, 8\}$,

b) $x > 0 \wedge x \neq 2$ pre $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$,

c) $x < 1 \Rightarrow (x + 2)^2 < 9$ pre $x \in \{-10, 0, 5\}$,

d) $x = 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9$ pre $x \in \{-1, 1, 5\}$.

4) Ak odpočítame od trojciferného čísla zapísaného (od pravej ruky k ľavej) troma za sebou idúcimi číslicami, číslo zapísané týmito číslicami v obrátenom poriadku, tak rozdiel je vždy konštantný. Tvrdenie dokážte a nájdite tento konštantný rozdiel.

5) Rozhodnite, či platia nasledujúce vety:

a) Každé číslo deliteľné štyrmi je deliteľné aj ôsmimi.

b) Každé číslo deliteľné ôsmimi je deliteľné aj štyrmi.

c) Každé číslo deliteľné ôsmimi je deliteľné štyrmi aj dvoma.

d) Každé číslo deliteľné dvoma a štyrmi je deliteľné ôsmimi.

e) Každé číslo, ktoré je deliteľné tromi, je deliteľné aj deviatimi.

f) Každé číslo, ktoré je deliteľné deviatimi, je deliteľné aj tromi.

1.3. Správne chápať význam logických spojok, určiť pravdivostnú hodnotu *konjunkcie, alternatívy, implikácie* a *ekvivalencie* dvoch výrokov.

-

1) Opíšte situácie, kedy sú nasledujúce tvrdenia pravdivé (resp. nepravdivé):

a) Teraz budem počúvať rádio alebo čítať knihu.

b) Pricestujem v sobotu alebo v nedeľu.

c) Mám hlad a smäd.

d) Ak mám zvýšenú teplotu, ležím v posteli.

e) Ak je vozidlo predbiehané, vodič nezvyšuje jeho rýchlosť.

f) Mlieko pijem len vtedy, keď je čerstvo nadojené.

2) Porovnajte pravdivostné hodnoty nasledujúcich výrokov, ak výrok "Martin je doma" označíme A a výrok "V Martinovom byte hrá rádio" označíme B:

a) $(A \wedge B)'$, $A' \wedge B'$, $(A \vee B)'$, $A' \vee B'$

b) $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $B' \Rightarrow A'$, $A \wedge B'$

1.4. Utvoriť negáciu výroku zloženého z dvoch výrokov.

1) Niekto vyslovil hypotézu: "Ak sa v konvexnom štvoruholníku rozpoľujú uhlopriečky, tak je stredovo alebo osovo súmerný."

Keby sme chceli túto hypotézu vyvrátiť, museli by sme nájsť taký konvexný štvoruholník, ktorého uhlopriečky sa

A nerozpoľujú a pritom je stredovo aj osovo súmerný

B nerozpoľujú a pritom je stredovo alebo osovo súmerný

C rozpoľujú a pritom je stredovo súmerný, ale nie je osovo súmerný

D rozpoľujú a pritom je osovo súmerný, ale nie je osovo súmerný

E rozpoľujú a pritom nie je ani osovo, ani stredovo súmerný

2) Sformulujte negáciu hypotézy "Ak p je prvočíslo, tak $2^p + 1$ je buď prvočíslo alebo súčin dvoch prvočísel".

3) Vyjadrite stručne pomocou zložených výrokov negáciu týchto výrokov:

a) Máme pivo a minerálky.

b) Osviežim sa čajom alebo kávou.

c) Ak budem mať na obed bravčové mäso, budem piť pivo.

d) Nie som hladný a nie som smädný.

e) Nie som hladný, som smädný.

f) Ak dostanem čerstvé ovocie, nekúpim kompót.

g) Grapefruity kúpim len vtedy, ak nebudú citróny.

1.5 Správne chápať výroky, ktoré obsahujú slová *každý, žiadny, aspoň, práve, najviac* a tvoriť ich negácie.

1) Negáciou výroku "Každá kvadratická rovnica má najviac 2 reálne korene" je výrok

A Každá kvadratická rovnica má aspoň 2 reálne korene

B Každá kvadratická rovnica má aspoň 3 reálne korene

C Niektorá kvadratická rovnica má 3 reálne korene

D Niektorá kvadratická rovnica má viac ako 2 reálne korene

E Niektoré kvadratické rovnice nemajú reálne korene

2) Negujte výroky:

a) Všetky násobky čísla osem sú párne čísla.

b) Niektoré násobky čísla sedem sú násobkami čísla päť.

c) Dá sa zostrojiť trojuholník, ktorý má päť zo šiestich úsečiek (strán a uhlopriečok) zhodných.

d) Ktorýkoľvek trojuholník má súčet ťažníc väčší než súčet strán.

e) Ani jeden koreň rovnice $(x + 1).(x - 6) = 0$ nie je kladné číslo.

f) Žiadny trojuholník s obvodom rovnajúcim sa 4 nemá väčší obsah než 1.

3) Vypočítajte hodnoty trojčlena $T(n) = n^2 - 8n + 12$ pre

$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Vyslovte existenčné a všeobecné výroky o kladnosti alebo zápornosti $T(n)$, ktorých pravdivosť je odôvodnená vypočítanými hodnotami. Sformulujte aj aspoň dve všeobecné a dve existenčné hypotézy o hodnotách $T(n)$.

4) Sformulujte, ako by ste postupovali pri vyvracaní hypotézy:

a) Danými dvoma bodmi prechádza jediná kružnica.

b) Pre každé dve reálne čísla *a, b* platí, že $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

c) Číslo $2^n + 1$ je pre každé prirodzené číslo n prvočíslo.

5) Zistite, ktoré z nasledujúcich hypotéz sú pravdivé. Nepravdivé hypotézy negujte.

a) Možno nájsť najviac sto reálnych čísel, ktoré nie sú racionálne.

b) Číslo $\frac{4}{5}$ možno zapísať najviac štyrmi rôznymi spôsobmi.

c) Pre každé reálne číslo x platí: $x^2 < 2x$.

d) Možno nájsť najviac dve racionálne čísla, ktoré nie sú desatinné.

e) Číslo $0,\overline{9}$ je menšie ako 1.

1.6. Utvoriť k danej implikácii jej obmenu, negáciu i obrátenú implikáciu.

1) Chceme dokázať tvrdenie "Ak má číslo $n \in N$ nepárny počet deliteľov, je štvorcom (druhou mocninou prirodzeného čísla)". Pri nepriamom dôkaze môžeme použiť negáciu alebo obmenu daného výroku. Utvorte ich v tomto prípade.

2) Chceme dokázať tvrdenie "Ak $n \in N$ nie je štvorcom prirodzeného čísla, tak n nie je racionálne číslo". Rozhodli sme sa postupovať nepriamo, čiže dokazovať obmenenú implikáciu. Ktoré z nasledujúcich tvrdení máme dokázať?

A Ak n je racionálne číslo, tak n je štvorcom prirodzeného čísla

B Ak n nie je racionálne číslo, tak n nie je štvorcom prirodzeného čísla

C Ak n nie je racionálne číslo, tak n je štvorcom prirodzeného čísla

D Ak n je racionálne číslo, tak n nie je štvorcom prirodzeného čísla

E Existuje také $n \in N$, pre ktoré n nie je racionálne číslo a pritom n nie je štvorcom prirodzeného čísla

3) Vyslovte obmenu, obrátenie a negáciu každej z nasledujúcich viet a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) Pre každé dva rovinné útvary U_1, U_2 platí, že ak sú zhodné, majú rovnaký obsah.

b) Pre každý štvoruholník Q platí, že ak nie sú uhlopriečky štvoruholníka Q navzájom kolmé, tak Q nie je kosoštvorec.

c) Ak má funkcia f v bode a limitu $f(a)$, tak f je v bode a spojitá.

d) Ak má funkcia g v bode a lokálny extrém, tak $g'(a) = 0$.

1.7. Zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou alebo množinovými operáciami.

1) Charakteristickou vlastnosťou určte množinu:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$,

b) $B = \{4, 7, 10, 13, ...\}$,

c) os úsečky PQ.

2) Zistite, ktoré čísla sú prvkami množiny $A = \{x \in Z;\ |x + 2| \leq 2\}$

1.8 Rozhodnúť, či daný objekt je, alebo nie je prvkom danej množiny.

1) Každá číslica dekadického zápisu prirodzeného čísla m patrí množine $\{2, 4, 5\}$.
Napíšte všetky čísla m, ktoré:

a) sú trojciferné

b) vyhovujú nerovnici $245 < m < 445$

2) Určte množinu všetkých päťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je 3.

3) Daná je množina $K = \{[x, y] \in R \times R;\ x^2 + y^2 = 2\}$. Určte:

a) tie prvky tejto množiny, o ktorých platí $[x, y] \in Z \times Z$

b) aspoň dva prvky, ktoré do tejto množiny nepatria.

1.9 Určiť vzťahy medzi množinami (podmnožina a rovnosť) a znázorniť ich pomocou Vennovych diagramov.

1) Určte vzťahy medzi množinami *A, B, C, D*. Množiny a vzťahy medzi nimi znázornite pomocou Vennovych diagramov.

$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{2, 5\}, D = \{6, 2, 4\}}$

2) Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Zapíšte nasledujúce podmnožiny množiny *M*:

a) podmnožinu *T* všetkých násobkov 3,

b) podmnožinu *H* všetkých násobkov 10,

c) podmnožinu *D* všetkých násobkov dvojciferných čísel,

d) podmnožinu *J* všetkých čísel, ktorých zápis začína číslicou 1

Množinu *M* i jej podmnožiny *T, H, D, J* znázornite graficky.

3) Overte pomocou Vennovych diagramov, že pre ľubovoľné podmnožiny *A, B* danej základnej množiny platí:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4) Určte vymenovaním dvojice všetkých podmnožín *X, Y*, ktoré spĺňajú jednotlivé trojice podmienok:

a) $X \subset \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$, $Y \subset \{2, 3, 4, 5, 8\}$, $X \cap Y = \{5\}$

b) $X \cup Y = \{3, 5, 6, 8\}$, $X \cap \{4, 6, 8\} = \emptyset$, $Y \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5\}$

c) $X \cap Y = \emptyset$, $X' \cap Y = \{3, 5, 7\}$, $X \cap Y' = \{2, 4, 6, 8\}$

d) $X \cap Y = \{2, 6, 7\}$, $X \subset \{5\}'$, $Y \subset \{1, 3, 4, 6, 7\}$

5) V triede je 38 žiakov, 16 z nich pretekalo v behu, 20 v plávaní. Žiadneho z týchto pretekov sa nezúčastnilo 10 žiakov. Koľko žiakov behalo aj plávalo?

1.10 Správne interpretovať množinové operácie *zjednotenie, prienik* a *doplnok.*

1) Všetky uvedené rovnosti s výnimkou jednej platia pre ľubovoľné neprázdne množiny K, L, M.

Ktorá z uvedených rovností neplatí?

A $K \cup \emptyset = K$

B $K \cap (L \cap M) = (K \cap L) \cap M$

C $(K \cup L) \cap L = L$

D $K \cup (L \cap \emptyset) = K \cup L$

E $K \cup L \cup M = L \cup M \cup K$

2) Dané sú množiny: $A = \{x \in Z;\ x^2 < 10\}$,

$B = \{x \in N;\ 3 \mid x \ \wedge\ x < 17\}$,

$C = \{x \in Z;\ x^2 = 1 \vee 2.|x| < 5\}$.

Vymenovaním prvkov určte množiny A, B, C, $A \cap B$, $B \cup C$, C_A'.

1.11 Určiť zjednotenie a prienik množín i doplnok množiny *A* vzhľadom na množinu *B*, ak *A* je podmnožinou *B*.

1) A, B sú dve podmnožiny množiny M, pričom A je nekonečná množina a B je konečná množina. Ktorý z nasledujúcich výrokov je potom nepravdivý?

A $A \cup B$ je nekonečná množina

B $A \cap B$ je konečná množina

C $A \cap M = M$

D $A \cup M = M$

E $A \cap B_M'$ je nekonečná množina

2) Čo najjednoduchšie zapíšte množiny:

a) $(2, 6) \cap \langle 4, \infty)$

b) $(2, 6) \cap (10, \infty)$

c) $(2, 6) \cup \langle 4, \infty)$

d) $(-\infty, 3) \cup (0, \infty)$

e) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

f) doplnok intervalu $(-\infty, 3>$ v množine R

g) zjednotenie doplnku intervalu $(5, \infty)$ v množine R s intervalom $<0, 10>$

h) prienik doplnku intervalu $<1, 5>$ v množine R s intervalom $<2, 10>$

i) prienik zjednotenia intervalov $(-\infty, 3)$, $<0, 5>$ v množine R.

1.12 Poznať pojem *interval,* jeho zápis, ovládať množinové operácie s intervalmi a dokázať ich pohotovo používať.

1) Nech I_1 a I_2 sú dva intervaly na číselnej osi, pre ktoré platí:

$$I_1 \cup I_2 = R,\ \ I_1 \cap I_2 = <3, 5),\ \ 0 \in I_1.$$

Určte tieto dva intervaly.

2) Pomocou intervalov zapíšte množinu:

a) $A = \{x \in R;\ x \leq 2\}$,

b) $B = \{x \in R;\ 3x \geq 8 \wedge 5x < 29\}$,

c) $C = \{x \in R;\ |x - 2| < 3\}$,

d) $D = \{x \in R;\ |x - 1| \geq 4\}$.

3) Charakteristickou vlastnosťou zapíšte množinu:

a) $A = (-\infty, 5\rangle$,

b) $B = (-2, 7\rangle$,

c) $C = (-\infty, -1\rangle \cup (3, +\infty)$,

d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

4) Dané sú množiny $A = \langle -2, 7\rangle$, $B = (0, 10\rangle$, $C = \{x \in R;\ x > 2\}$.

Pomocou intervalov zapíšte množiny: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$, A_R', C_R'.

1.13 Rozlišovať a chápať pojmy *definícia, axióma, veta.*

1) Rozhodnite, ktorá z uvedených viet je definíciou a ktorá matematickou vetou:

a) Prvočíslo je prirodzené číslo, ktoré má v množine N práve dvoch rôznych deliteľov: číslo 1 a seba.

b) V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta.

c) $\sqrt{2}$ je racionálne číslo.

d) Kružnica $k(S, r)$ je množina všetkých bodov v rovine, ktoré sú od daného bodu S vzdialené r.

e) Pre každé prirodzené číslo n platí: $2|(n^2 - n)$.

f) Uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé.

2) Opravte chyby v nasledujúcich vetách tak, aby sa stali správnymi definíciami:

a) Uhlopriečka mnohouholníka je úsečka, ktorá spája dva jeho vrcholy.

b) Rovnobežník je rovinný konvexný štvoruholník, ktorého dve a dve strany majú rovnakú veľkosť.

c) Kvadratická rovnica je algebrická rovnica, v ktorej sa vyskytuje neznáma v druhej mocnine.

d) Prirodzené číslo nazývame zložené, ak ho možno rozložiť na súčin dvoch čísel.

e) Rovnobežkami nazývame priamky, ktoré nemajú žiaden spoločný bod.

3) V akom vzťahu su pojmy *lichobežník* a *rovnobežník* za predpokladu, že lichobežník definujeme takto:

a) Lichobežník je štvoruholník, ktorého dve protiľahlé strany sú rovnobežné.

b) Lichobežník je štvoruholník, ktorého dve protiľahlé strany sú rovnobežné a zvyšujúce dve rôznobežné.

4) Aritmetiku reálnych čísel možno vybudovať na sústave axióm, z ktorých niektoré poznáte pod názvom *zákon o asociatívnosti a komutatívnosti* operácií sčítania a násobenia, či pod názvom *zákon distributívnosti* násobenia vzhľadom na sčítanie. Uveďte presnú formuláciu týchto axióm.

2. Výrazy

2.1. Tvoriť výrazy, zapísať slovný text pomocou konštánt, premenných a znakov operácií.

1) Zapíšte pomocou premenných:

a) súčet druhých mocnín troch po sebe idúcich ľubovoľných prirodzených čísel,

b) tretiu mocninu súčtu dvoch ľubovoľných celých čísel,

c) druhá mocnina podielu súčtu a rozdielu dvoch reálnych čísel sa rovná 1.

2) Zapíšte pomocou premenných:

a) rozdiel druhých mocnín dvoch ľubovoľných reálnych čísel,

b) tretiu mocninu súčtu dvoch ľubovoľných reálnych čísel,

c) ľubovoľné párne, resp. nepárne číslo.

3) Pomocou premenných a kvantifikátorov vyjadrite formulácie:

a) Druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.

b) Existuje prirodzené číslo, ktoré je koreňom rovnice $x^2 - 9 = 0$.

4) Rozhodnite, ktoré písmená sú v daných výrazoch premennými a ktoré konštantami:

a) $V = \pi r^2 v$ (Vzorec pre objem rotačného valca)

b) Roviny ω, φ sú navzájom kolmé.

c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

d) Bod A neleží na priamke a.

Vymedzte obory všetkých premenných.

5) Zapíšte pomocou vhodne zvolenej premennej postup výpočtu v tejto zábavnej úlohe: "Zvoľte si ľubovoľné prirodzené číslo, pripočítajte k nemu 7, výsledok násobte piatimi, odpočítajte 30, výsledok násobte dvoma, získané číslo mi povedzte a ja vám poviem, ktoré číslo ste si pôvodne mysleli."

Akým počtovým postupom možno zistiť pôvodné číslo z výsledku?

2.2. Vyjadriť slovami obsah jednoduchého textu zapísaného matematickou symbolikou.

1) Vyjadrite slovami:

a) $(a - b)^2$; $a, b \in R$ b) $a^3 + b^3$; $a, b \in R$

c) $[3(a - b)]^2$; $a, b \in R$ d) $2(a^3 + b^3)$; $a, b \in R$

e) $2a^3 - 2b^3$; $a, b \in R$ f) $(2n - 1) + (2n + 1)$; $n \in N$

2) Vyjadrite slovami:

a) $\forall x \in R$; $\sqrt{x^2} = |x|$ b) $\exists x \in R$; $(x + 1)^2 < 1$

2.3.Vyčísliť (upravovať) výrazy s reálnymi číslami.

1) Určte hodnotu výrazu $V(a)$ pre $a = 2$.

$$V(a) = \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a}}}}$$

2) Určte hodnotu výrazu $V(a,b)$ pre $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$V(a,b) = \left(a^{-\frac{3}{2}}.b.\left(a.b^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3$$

3) Určte hodnotu výrazu $V(r)$ pre $r = -2$ a $r = \sqrt{6}$.

$$V(r) = \frac{r+1}{r^2 - 2r} + \frac{r+1}{r^2 + 2r} - \frac{2r}{r^2 - 4}$$

4) Vypočítajte: $(0{,}0625)^{-0{,}25} =$

5) Aký menovateľ bude mať zlomok

$$\frac{1.2.3.4.........99.100}{6^{50}}$$

ak ho upravíte na základný tvar?

2.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmu *mnohočlen, člen, koeficient* a *stupeň mnohočlena.*

1) Dané sú mnohočleny: $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$, $Q(x) = 3 - 2x^2$, $R(x) = -3x + 5x^2 + 2$.

a) Určte ich stupeň.

b) Vymenujte ich členy.

c) Určte: kvadratický člen mnohočlena $P(x)$,
lineárny člen mnohočlena $Q(x)$,
absolútny člen mnohočlena $R(x)$.

d) Určte koeficienty lineárnych členov jednotlivých mnohočlenov.

e) Vypočítajte hodnoty: $P(2)$, $Q(0)$, $R(1)$.

f) Určte mnohočlen $W(x) = Q(x) \,.\, [P(x) - R(x)]$.

2.5. Sčítať, odčítať, násobiť mnohočleny, vydeliť mnohočlen lineárnym dvojčlenom (koreňovým činiteľom).

1) Určte výraz, ktorý musíme pripočítať k výrazu $(x + y)^2 + z^2$, aby sme dostali výraz $(x + y - z)^2$

2) Upravte: $(2x^2 - x - 1) : (x - 1) =$

3) Zapíšte ako súčin:

a) $x^2 - 0{,}3x$ b) $12x^2 - 48$ c) $3x^2 - 5x$

d) $x^2 - 6$ e) $2x^2 - 81$ f) $(x + 1)^2 - 4$

g) $(x + 3)^2 - (x - 1)^2$ h) $x^3 - 16x$

4) Dané trojčleny rozložte na súčin lineárnych dvojčlenov a pritom určte ich najmenšiu hodnotu:

a) $x^2 + 16x - 17$ b) $x^2 - 8x + 12$ c) $x^2 - 2x - 3$

d) $x^2 + 5x - 50$ e) $x^2 - 5x - 6$ f) $x^2 - x - 110$

g) $2x^2 - 6x - 20$ h) $x^2 - 0{,}6x - 0{,}16$ i) $4x^2 - 6x + 2$

2.6. Určiť obor definície výrazu a vyčísliť jeho hodnotu pre konkrétne reálne číslo.

1) Daný je výraz

$$V(x) = \sqrt{\frac{x-1}{|x-1|}}$$

Určte: a) obor definície tohto výrazu
b) hodnotu výrazu pre $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$

2) Určte hodnotu výrazu $V(a,b)$ pre: a) $a = 2$, $b = 0$
b) $a = 1$, $b = 10^6$

$$V(a,b) = \frac{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}{1 - \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 - \dfrac{1+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{2}{b} + 1}$$

3) Určte obor definície výrazu

$$W(x) = \frac{tgx.\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

i jeho hodnoty pre $x \in \{0, \frac{p}{6}, \frac{p}{2}, -\frac{3p}{2}, -4p\}$.

2.7. Poznať vzorce $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ a využiť ich pri úpravách výrazov.

1) Určte výraz *V(a)*, ak platí $\dfrac{V(a)}{a^3+1} = \dfrac{a-1}{a^2-1}$

2) Upravte: a) $[(3x + y)^2 - (x - 3y)^2] \,.\, 2xy =$

b) $(2x - 1)^3 - 8(2 - x)^3 =$

3) Upravte: $\left(\dfrac{x^2-2x+4}{4x^2-1} \cdot \dfrac{2x^2+x}{x^3+8} - \dfrac{x+2}{2x^2-x}\right) : \dfrac{4}{x^2+2x} - \dfrac{x+4}{3-6x}$

4) Upravte: $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y}}{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}} =$

5) Upravte: $(27x^3 - 8) : (3x - 2) =$

2.8. Upraviť výrazy s mocninami a odmocninami, s faktoriálmi, upraviť výrazy obsahujúce hodnoty funkcií *sin, cos, tg, cotg* a *log* i výrazy s absolútnou hodnotou.

1) Upravte výraz: $\dfrac{x^2+9x+14}{x^2-x-12} : \dfrac{x^2+6x-7}{x^2-2x-15} =$

2) Upravte: a) $\dfrac{|x-3|+\sqrt{x^2-6x+9}}{6-2x} =$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} =$

3) Zjednodušte výraz: $\sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.\sqrt{\sqrt{3}-1} =$

4) Zjednodušte: $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x} =$

5) Zjednodušte (upravte) výraz $F(n)$.

$$F(n) = \frac{(n+2)!}{n!} - 2.\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

3. Teória čísel

3.1. Rozoznať pojmy *číslo* a *číslica (cifra)*

1) Zapíšte rozvinutý zápis čísiel v desiatkovej sústave

a) 28 b) 2001 c) 3245

2) Zapíšte skráteným zápisom čísla:

a) $8.10^3 + 32.10^2 + 1.10 + 5$

b) $3.10^5 + 2.10^2 + 3$

c) $6.10^3 + 13.10^2$

3) Určte ciferné súčty čísel:

a) 28

b) 2001

c) 3245

d) $8.10^3 + 32.10^2 + 1.10 + 5$

e) $3.10^5 + 2.10^2 + 3$

f) $6.10^3 + 13.10^2$

4) Súčet číslic dvojciferného čísla je 7. Ak zameníme poradie oboch číslic, dostaneme číslo, ktoré po vynásobení pôvodným bude 1462. Ktoré je to číslo?

5) Ak zameníme poradie číslic istého dvojciferného čísla, dostaneme nové číslo, ktorého súčet s pôvodným číslom je 88 a rozdiel po odčítaní od pôvodného čísla je 36. Určte pôvodné číslo.

3.2. Definovať deliteľnosť prirodzených čísel a overovať deliteľnosť konkrétnych čísel

1) Dokážte, že číslo:

a) $9^5 - 3^5$ je deliteľné 6

b) $7^{10} - 1$ je deliteľné 6

c) $123^{25} - 106^{25}$ je deliteľné 17

d) $6^{101} + 2^{101}$ je deliteľné 8

e) $14^{13} + 1$ je deliteľné 15

f) $2^{10} + 3^{15}$ je deliteľné 31

2) Koľko deliteľov má číslo:

a) 3.13 b) $3^2.13$ c) $3^3.13$ d) $3^4.13$

e) $3^4.13^2$ f)3.13^3 g) $3^4.13^4$?

3) Zo 625 kociek s hranou dĺžky 2 cm sme vytvorili kváder. Aký môže mať povrch?

4) Koľko riešení má rovnica *x . y = 12* s dvoma neznámymi v množine prirodzených čísel?

5) Koľko trojciferných čísel

a) je deliteľných 17

b) nie je deliteľných číslom 23?

3.3 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmu *prvočíslo, zložené číslo, deliteľ, násobok, súdeliteľné* a *nesúdeliteľné čísla, ciferný súčet.*

1) Zapíšte prvočíselné rozklady čísel 80, 180, 644, 496, 5005.

2) Rozhodnite, čo najefektívnejšie, ktoré z daných čísel sú prvočísla:

a) 667 b)677 c) 439 d) 1591 e) 4187

$a)\frac{91}{104}$ $b)\frac{1825}{3200}$ $c)\frac{696}{2088}$ $d)\frac{3600}{4062}$

3) Zapíšte v základnom tvare zlomky:

4) Pomocou definícií príslušných pojmov vysvetlite význam výrokov:

a) 101 je prvočíslo

b) 201 je zložené číslo

c) 301 nie je prvočíslo

d) 401 nie je zložené číslo

3.4. Sformulovať pravidlá deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 a 10

1) Rozhodnite o pravdivosti výrokov:

a) Číslo 72 je deliteľné číslom 6.

b) Číslo 74 je násobkom čísla 6.

c) Číslo 13 je deliteľom čísla 10 296.

2) Rozhodnite, ktoré z daných čísel sú deliteľné číslami 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10:

a) 153 b) 1460 c) 9078 d) 51 410

e) 536 f) 1164 g) 6335

3) Aké číslice treba dať namiesto hviezdičiek, aby platilo

a) číslo 34**H**5710 je deliteľné 3

b) číslo 34**H**5710 je deliteľné 5

c) číslo 34**H**5710 je deliteľné 7

d) číslo 23876**H**2 je deliteľné 4

e) číslo 23876**H**2 je deliteľné 8

f) číslo 5**H**4758**H** je deliteľné 36

g) číslo 5**H**4758**H** je deliteľné 15 ?

4) V štvorcifernom čísle $4x7y$ nahraďte x a y číslicami tak, aby vzniklo čo najmenšie číslo, ktoré je deliteľné

a) tromi b) štyrmi c) dvanástimi

5) Prirodzené číslo je deliteľné osemnástimi práve vtedy, keď

A je párne a jeho ciferný súčet je deliteľný tromi

B je súčasne deliteľné dvoma a deviatimi

C je súčasne deliteľné tromi a šiestimi

D jeho posledné dvojčíslie je deliteľné osemnástimi

E je deliteľné štyrmi a jeho ciferný súčet je deliteľný deviatimi

3.5. Aplikovať poznatky o deliteľnosti pri vytváraní prvočíselných rozkladov zložených čísel, využívajúc poznatok, že ak sa súčin deliteľov p_1, p_2 prirodzeného čísla n rovná tomuto číslu, tak aspoň jeden z deliteľov p_1, p_2 je £ $\sqrt{n}$

1) Zapíšte prvočíselné rozklady čísel

a) 943 b) 349

2) Čo najúspornejším spôsobom rozhodnite, ktoré z daných čísel sú prvočísla:

a) 277 b) 899 c) 7897 d)10147

3) Napíšte čísla, ktorými treba deliť dané číslo d, ak budete chcieť úsporne zistiť, či d je prvočíslo:

a) $d = 271$ b) $d = 901$ c) $d = 7891$

4) Koľko je trojciferných čísel, ktoré majú spoločného deliteľa (rôzneho od 1) s číslom:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 1024 ?

5) Dajú sa v čísle 45873602 vymeniť navzájom dve číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné:

a) 3 b) 5 c) 4 d) 11

e) 16 ?

Nájdite vždy všetky možnosti.

3.6. Určiť najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel.

1) Nájdite všetky spoločné delitele čísel:

a) 24, 28 b) 25, 16 c)60, 72 d) 96100, 108, 304

2) Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa čísel:

a) 72, 96 b) 91, 105 c) 99, 100 d) 144, 720

e) 90, 115, 320

3) Nájdite všetky dvojice dvojciferných čísel väčších ako 20, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 12.

4) Nájdite najmenší spoločný násobok čísel:

a) 15, 20 b) 24, 36 c) 54, 162 d) 4, 5, 6

e) 18, 75, 40

5) Nájdite čo najväčší počet dvojíc prirodzených čísel, ktorých najmenší spoločný násobok je:

a) 11 b) 39 c) 42

3.7. Rozoznať na konkrétnych číslach konečný a nekonečný desatinný rozvoj reálneho čísla, nekonečný periodický rozvoj, racionálne a iracionálne číslo

1) Dané reálne čísla usporiadajte od najmenšieho po najväčšie: 3,14; π; 22/7; 3,141; $\sqrt{10}$.

2) Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich reálnych čísel 3,14; π; 22/7; 3,141; $\sqrt{10}$ sú iracionálne.

3) Určte prevrátené čísla k číslam: 5, –3, $\frac{3}{5}$, 0, $-\sqrt{5}$; 0,4; $\overline{0,4}$.

4) Zaokrúhlite čísla na stotiny:

a) 35,625 b) $\sqrt{5}$ c) 0,03548

5) Určte, ktoré z čísel 5, –7, $\sqrt{10}$, 38,2; 2π, $1,\overline{6}$; 3,14 sú

a) prirodzené
b) celé
c) racionálne
d) iracionálne
e) reálne
f) periodické

3.8. Znázorniť reálne číslo na číselnej osi

1) Na číselnej osi znázornite obrazy racionálnych čísel:

a) a) –3; 5; –7; 4,5

b) b) $5\frac{1}{2}$; $-7\frac{1}{2}$; $-2\frac{2}{5}$

2) Znázornite na číselnej osi obrazy čísel $-5\frac{1}{4}$ a $6\frac{1}{2}$ a vyznačte na nej obrazy všetkých celých čísel, ktoré ležia medzi nimi. Určte aritmetický priemer týchto celých čísel.

3) Na číselnej osi nájdite obrazy čísel:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$

e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ f) $\sqrt{6}:\sqrt{2}$ g) $\sqrt{7}:\sqrt{3}$

4) Na číselnú os zakreslite čísla: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

3.9. Definovať racionálne číslo a zapísať ho aspoň dvoma spôsobmi.

1) V tvare desatinného rozvoja zapíšte zlomky:

a) $\frac{10}{44}$ b) $\frac{5}{22}$

2) Usporiadajte vzostupne racionálne čísla: $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; 0,34

3) Dané racionálne čísla zapíšte zlomkom v základnom tvare:

a) $\frac{180}{252}$ b) $-\frac{108}{144}$ c) $\frac{180}{135}$ d) $-\frac{264}{440}$

4) Rozhodnite, koľko rôznych racionálnych čísel je zapísaných v tomto zozname:

$\frac{63}{168}, \frac{120}{96}, \frac{1}{4}$; 0,375; $\frac{81}{216}, \frac{270}{216}$; 1,25; $\frac{48}{128}$

5) Na číselnej osi znázornite racionálne čísla, ktoré sú zapísané v tvare zlomku:

$\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{9}{5}$

3.10. Napísať desatinné číslo v rozvinutom i skrátenom tvare, určiť jeho rád.

1) Zapíšte skráteným zápisom čísla:

a) $2 \,.\, 10^3 + 3 \,.\, 10 + 5 \,.\, 10^{-1} + 3 \,.\, 10^{-3}$

b) b) $4 \,.\, 10^{-2} + 1 \,.\, 10^{-5}$

2) Zapíšte dané číslo v tvare $a.10^k$, kde $a \in \langle 1,10), k \in Z$

a) 354 687 b) 0,56 c) 0,0205

3) Zaokrúhlite na stotiny:

a) 54,36879 b) 2,9602 c) 0,05679

4) Zaokrúhlite na tri platné číslice:

a) 23,6549 b) 2,060343

5) Premeňte na jednotky v zátvorke. Výsledok píšte v tvare $b.10^n$, kde n je celé číslo, $1 \leq b < 10$.

a) 856 kg (g) b) 78 dm (km) c) $6{,}5\ .10^{-5}$ hl (dl)

d) $540\ .\ 10^{10}\ \text{cm}^2\ (\text{km}^2)$ e) $987\ \text{mm}^3\ (\text{dm}^3)$

3.11. Definovať absolútnu hodnotu reálneho čísla a vysvetliť jej geometrický význam.

1) Vypočítajte:

a) $|\ 3|$ b) $|-1{,}5|$

c) $|9 - 2| - |- 15 - (-3)|$ d) $|7 - |4 - 11||$

2) Na číselnej osi znázornite všetky reálne čísla, pre ktoré platí:

a) $|x| = 3$ b) $|x| \leq 2$ c) $|x| > 1$

3) Na číselnej osi znázornite všetky reálne čísla, pre ktoré platí:

a) $|x - 2| = 5$ b) $|x + 3| = 6$ c) $|x - 1{,}5| = 0{,}5$ d) $|x + 1| > \sqrt{2}$

e) $|x - \sqrt{3}\,| < 2$ f) $|x + \pi| > 0$ g) $|x - 1| < -3$ h) $|x + 4| > -1$

4) Vyriešte v R rovnice:

a) $|x + 3| = 3 + 2x$

b) $|7x - 1| = |21 - 9x|$

c) $|x + 1| + |x - 1| = 4$

5) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti funkcie f : $y = \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$

3.12. Definovať mocninu s prirodzeným mocniteľom a dokázať základné pravidlá počítania s týmito mocninami.

1) Vypočítajte spamäti:

a) 300^1 b) 0^7 c) 2^5 d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

2) Vypočítajte:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 2^7}{2^{10}}$ b) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^5 \cdot 3^2}$ c) $\dfrac{(2^3 \cdot 3^2)^3}{(2 \cdot 3)^5}$

3) Dané výrazy vyjadrite ako mocniny so základom 2 alebo 3 a bez použitia kalkulačky vypočítajte :

a) $\dfrac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\dfrac{81}{64}\right)^3$ b) $\dfrac{9^5 \cdot 2^7}{27^2 \cdot 96} \cdot \dfrac{36}{6^3}$

4) Vypočítajte:

a) $\dfrac{2(ab)^3}{3a^2b} \cdot \dfrac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$ b) $\dfrac{5a^3b^7}{2ab^6} \cdot \left(\dfrac{2a^2b^3}{ab^2}\right)^3$

c) $\dfrac{2x^5y^4}{(2x^2y)^2} : \left(\dfrac{xy}{2xy^2}\right)^3$

5) Vypočítajte:

a) 2^0, 2^2, -2^2, $(-2)^2$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$; $0{,}05^2$; $(-0{,}2)^4$

b) $2^{12} . 2^8 . 2^{21}$, $(2^2)^3 . (2^3)^2 . (2^4)^3$

c) $5 . 0{,}2^2 + (5 . 0{,}2)^2$

3.13. Definovať mocninu s celočíselným a racionálnym mocniteľom.

1) Vypočítajte:

a) 2^0, 2^{-2}, -2^{-2}, $(-2)^{-2}$; $0{,}05^{-2}$; $(-0{,}2)^{-4}$

b) $2^8 . 2^{24} . 2^{-36}$, $\dfrac{2^{-17} \cdot 2^{12}}{2^{-8}}$, $(2^{-2})^{-3} . (2^2)^{-3} . (2^{-4})^{-3}$

c) $-\left(\dfrac{10^{-15} \cdot 10^4}{10^{-13}}\right)^2$ d) $\dfrac{1300^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-20}}{(2 \cdot 10^{-5})^3}$

2) Vypočítajte:

a) $25^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$

c) $5\cdot 16^{\frac{1}{4}}$ d) $8^{\frac{2}{3}}$

e) $2^{-2}\cdot 64^{-\frac{1}{2}}$ f) $100^{-\frac{1}{2}}$

3) Vypočítajte a uveďte podmienky, pri ktorých majú zmysel výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$ b) $(x-y)^{\frac{2}{3}}\cdot (y-x)^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{9}}\cdot\left(a^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$ d) $3\cdot a^{\frac{7}{10}}\cdot a^{\frac{2}{5}}\cdot 2a^{\frac{15}{14}}:a^{\frac{9}{28}}$

e) $\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{2}-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^{2}$ f) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}+\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$

3.14. Definovať odmocninu a vysvetliť vzťah medzi mocninami a odmocninami.

1) Napíšte pomocou jednej odmocniny:

a) $a^{\frac{1}{2}}$ b) $b^{-\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{7}{2}}$ d) $y^{-0,13}$

2) Napíšte pomocou jednej mocniny:

a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[4]{a^{3}}$ c) $\left(\sqrt[4]{c}\right)^{7}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$

3) Upravte na jednu mocninu:

a) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ b) $\left(\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{7}{6}}}\right)^{-2}$ c) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}}{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}$

4) Upravte na odmocninu z čo najmenšieho prirodzeného čísla:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{50625}$ c) $\sqrt[6]{216}$

5) Načrtnite graf funkcie *f*. Funkčné hodnoty vypočítajte po zjednodušení výrazu.

$$f(x) = \frac{\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}}$$

3.15. Riešiť jednoduché úlohy využívajúce operácie s mocninami s celočíselným, racionálnym i reálnym mocniteľom.

1) Štvorcová sieň je vyložená 4900 štvorcovými dlaždicami, z ktorých každá má obsah 225 cm^2. Udajte rozmery siene.

2) Daná je kocka, ktorej hrana má dĺžku 6 cm. Určte dĺžku hrany kocky, ktorá má päťkrát väčší povrch.

3) Určte veľkosť polomeru gule, ktorej povrch je $21{,}81\pi$ cm^2.

4) Daný je štvorec s dĺžkou strany 5 *cm* a obdĺžnik s rozmermi 6 *cm* a 4 *cm.* Ktorý z nich má dlhšiu uhlopriečku?

A štvorec

B obdĺžnik

C obe uhlopriečky majú rovnakú veľkosť

5) Telesová uhlopriečka kvádra s rozmermi 3, 4, 5 má veľkosť:

A 12 **B** $5+\sqrt{2}$ **C** $5.\sqrt{2}$

4. Rovnice a nerovnice

4.1.1. Ovládať pojmy *neznáma, koeficient, obor rovnice, obor nerovnice, množina všetkých koreňov*

1) Zvoľte neznáme a zapíšte pomocou nich

   a) tretiu mocninu rozdielu ľubovoľných dvoch reálnych čísiel

   b) rozdiel tretích mocnín ľubovoľných dvoch reálnych čísiel

   c) päťnásobok súčtu tretích mocnín ľubovoľných dvoch reálnych čísiel

   d) súčet tretích mocnín päťnásobkov ľubovoľných dvoch reálnych čísiel

2) Odpovedzte na otázky:

   a) Ak je *n* ľubovoľné celé číslo, tak 2*n* je párne číslo. Ktoré párne číslo nasleduje hneď za ním?

   b) Ak je *k* ľubovoľné prirodzené číslo, tak 2*k* + 1 je nepárne číslo. Ktoré nepárne číslo nasleduje hneď za ním?

3) Rozhodnite, či existuje aspoň jedno prirodzené číslo *x*, pre ktoré platí:

   a) $\left(\frac{2x-15}{6}\right)^2 - \left(\frac{2x-3}{6}\right)^2 = 2$

   b) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 = 2x$

4) Množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Určte všetky prvky tejto množiny, pre ktoré má daný výraz zmysel.

   a) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x-2}{x-5}$ b) $\frac{x}{x^2-3x+2} < 8$ c) $\frac{x}{x-3}$ je celé číslo.

   Vo všetkých prípadoch určte aj korene z množiny *M*. Úlohu riešte i v prípade, ak obor neznámej je množina reálnych čísiel.

5) Nájdite množinu všetkých koreňov rovnice $3x^2 + x - 10 = 0$, ak obor premennej je

   a) množina všetkých reálnych čísiel *R*,

   b) množina celých čísiel *Z*,

   c) množina prirodzených čísiel *N*.

4.1.2. Vysvetliť, aký je rozdiel medzi dôsledkovou a ekvivalentnou úpravou rovnice a nerovnice.

1) Zistite, či rovnice R_1 a R_2 sú ekvivalentné (t.j. majú tú istú množinu koreňov).

R_1 : 5.(x + 3) = 3x – 7.(3 + x)

R_1 : x = – 4

2) Určte obor premennej tak, aby rovnice R_1 a R_2 boli ekvivalentné.

R_1 : (x – 1) = 3

R_2 : $(x – 1)^2 = 9$

Akú úpravu rovnice R_1 sme použili, aby sme získali tvar R_2?

3) Koľko koreňov má rovnica $x-\sqrt{2+x^2}=1$?

4) Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo platí: Ak $\sqrt{x}+x=2$, tak $x = 1$.

5) Nájdite všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú sústave:

a) $3x – 7 \leq 8x + 5$
$3x + 5 = 5 + 3x$

b) $2x – 7 > 7x – 2$
$6 – x = 2(x – 3) – 5$

c) $5 – 7x < 3x + 2$
$7 – 5x > 3 + 2x$

4.1.3. Uplatniť poznatok, že pri dôsledkovej úprave je skúška súčasťou riešenia.

1) Riešte rovnicu v množine reálnych čísiel:

a) $\dfrac{x^2-25}{x+5}=x+5$

b) $\dfrac{6x-x^2}{3x+18}+\dfrac{x}{3}=0$

2) Dokážte, že existuje jediné reálne číslo x, pre ktoré platí:

a) $\sqrt{14-x}=1+\sqrt{x+11}$

b) $3=2x+\sqrt{2x^2-x+4}$

3) Dokážte, že dané rovnice nemajú v R koreň:

a) $\sqrt{2+x^2}=x-1$

b) $\sqrt{3x+10}=1-\sqrt{x+11}$

c) $\sqrt{4x-6}=\sqrt{2x-4}$

d) $\sqrt{2(x+1)}+1=\sqrt{2x-5}$

4.1.4.Vysvetliť obsah pojmu *parameter*, vyriešiť jednoduchú rovnicu a nerovnicu s jedným parametrom, vykonať diskusiu riešenia vzhľadom na parameter.

1) Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom $b \in R$:

a) $(b^2 - 1)\, x = b - 1$ b) $5x - 2 = bx - b$

c) $b^2 x + 1 = x + b$ d) $b(x - 1) = x + b$

2) Vyriešte v R rovnicu $\frac{u+1}{v} + \frac{u+3}{v} = u + 1$

a) s neznámou u a parametrom v

b) s neznámou v a parametrom u

3) Riešte v R nerovnicu s neznámou x a parametrom $p \in R$:

a) $px < p^2$ b) $px < p - 1$ c) $p^2 x \geq p$

d) $(p+1)x \leq p^2 - 1$ e) $|p|.x < p^2$

4) Pre ktoré čísla b má rovnica $7x + b = 0$ s neznámou x riešenie v obore:

a) prirodzených čísiel,

b) celých čísiel,

c) reálnych čísiel ?

5) Pre ktoré celé čísla a má rovnica $(a^2 - 1)\ x = a - 1$ s neznámou x riešenie v obore prirodzených čísiel?

4.1.5. Vykonať rozbor slovnej úlohy vedúcej k rovniciam, nerovniciam a ich sústavám, (matematizácia slovnej úlohy), overiť výsledky a interpretovať ich s ohľadom na pôvodnú úlohu.

V daných slovných úlohách:

1. Zvoľte neznámu a jej obor.
2. Pomocou reálnych čísiel a premenných zapíšte výrazy, ktoré vyjadrujú jednotlivé podmienky, obsiahnuté v texte úlohy.
3. Vyhľadajte výrazy, ktoré vyjadrujú rovnaký údaj, potom

a) a) zapíšte rovnosť výrazov (dostanete rovnicu)

b) b) porovnajte výrazy (dostanete nerovnicu)

4. Sformulujte a vyriešte matematickú úlohu, ktorú máte vyriešiť.
5. Preverte, či riešenie matematickej rovnice (nerovnice) spĺňa podmienky slovnej úlohy.

---

1) Čitateľ zlomku je o 2 menší jako menovateľ. Ak sa čitateľ zmenší na svoju tretinu a k menovateľovi pripočítame 3, dostaneme $\frac{1}{8}$. Nájdite pôvodný zlomok.

2) V konvexnom mnohouholníku sme zostrojili všetky možné uhlopriečky. Koľko strán má mnohouholník, ak uhlopriečok je 14?

3) Jedna strana trojuholníka má dĺžku 4 cm, súčet dĺžok zvyšných dvoch strán je 12 cm. Nájdite všetky možné celočíselné dĺžky týchto strán.

4) Ak zväčším priemernú rýchlosť o 10 km/h, prejdem vzdialenosť 315 km o 2 hodiny skôr. Akou priemernou rýchlosťou idem?

5) Hokejové mužstvo má pred posledným zápasom súťaže pomer gólov 65 : 157. V súťaži sa môže zachrániť remízou alebo víťazstvom, ak dosiahne lepší pomer gólov ako 3 : 7. Určte všetky remízové výsledky, ktoré zaistia mužstvu ďalšiu účasť v súťaži.

4.1.6. Použiť metódu substitúcie pri riešení rovníc i nerovníc.

1) Metódou substitúcie riešte v R rovnice:

a) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$ b) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3\frac{x-1}{x+1} - 4 = 0$ d) $(x+\sqrt{2x}+1).(x+\sqrt{2x}-1) = 15$

e) $\sqrt[3]{\frac{4-x}{5+x}} + \sqrt[3]{\frac{5+x}{4-x}} = \frac{5}{2}$

2) Vhodnou substitúciou riešte v R rovnice:

a) $3^x + 3^{3-x} = 28$ b) $9^x - 25.3^x - 54 = 0$

c) $3^{4x} - 72.3^{2x} - 729 = 0$

3) Metódou substitúcie riešte v *R* rovnice:

a) $\log^2 x - \log x^4 + 3 = 0$

b) $x^{1+\log x} = 10^6$

c) $\log x^2 - \frac{1}{\log x} + 1 = 0$

d) $x^{\log x} - \log 10 = 10(1 - x^{-\log x})$

4) Metódou substitúcie riešte v *R* rovnice:

a) tg $(2x - \frac{p}{6}) = \sqrt{3}$

b) 2. sin $(3x - \frac{p}{3}) = -1$

c) 2.sin$^2 x$ + sin x = 1

d) tg x + $\sqrt{3}$ cotg x = $\sqrt{3}$ + 1

4.2.1 Využiť ekvivalentné úpravy pri vyjadrení neznámej zo vzorca

1) Z daných vzťahov vypočítajte neznáme veličiny uvedené v zátvorkách:

a) $S = \frac{1}{2}a.v_a$ (a, v_a) b) $S = \frac{1}{2}(a+c).v$ (a, v)

c) $O = 2p.r$ (r) d) $S = \frac{1}{3}S_p.v$ (S_p, v)

2) Povrch rotačného valca $S = 2p.r.(r + v)$. Vypočítajte:

a) polomer podstavy r, ak $S = 62{,}8\ \mathrm{dm}^2$, $v = 3\ \mathrm{dm}$

b) výšku valca v, ak $S = 2{,}5.10^6\ \mathrm{cm}^2$, $r = 5.10^2\ \mathrm{cm}$

3) Vyjadrite z nasledujúcich vzťahov požadované veličiny:

a) $W = m.g.h$, výšku h b) $m_1v_v = m_2v_2$, rýchlosť v_1, hmotnosť m_2

c) $s = \frac{1}{2}g.t^2$, čas t, zrýchlenie g d) $v = v_0 - g.t$, rýchlosť v_0, čas t

4) Z daných vzťahov vyjadrite veličinu uvedenú v zátvorke:

a) $W = m.g.h$ (h) b) $t = \frac{2s}{v}$ (v)

c) $S = \frac{v(a+c)}{2}$ (c)

5) Zo vzťahu $F = \frac{m.v}{t}$ vypočítajte:

a) hmotnosť m, ak $F = 450\ \mathrm{N}$, $v = 15\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $t = 4\ \mathrm{s}$

b) rýchlosť v, ak $F = 1{,}8 .\ 10^3\ \mathrm{N}$, $m = 3{,}6.\ 10^3\ \mathrm{kg}$, $t = 450\ \mathrm{s}$

4.2.2.Využiť ekvivalentné úpravy pri riešení lineárnych rovníc a nerovníc s jednou neznámou.

1) Riešte v obore R rovnice:

a) $5 - x = 2x - 7$

b) $3(4 - x) = x + 14$

c) $6x - 1 = 3(2 - x) + 9(x - 1) + 2$

d) $3(x + 5) - 4x = 5 - x$

e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

2) V obore *N* riešte rovnice:

a) $7 - 2x - \frac{1-3x}{7} = 2 - \frac{2x-1}{3}$

b) $\frac{7+9x}{4} - 1 + \frac{2+x}{9} = 7x$

c) $x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7$

3) Pre ktoré reálne čísla *k* majú dané rovnice rovnaké riešenie?

a) $7x - 8 = 2(x + 6)$, $4x - 9 = k$

b) $3x - 5 = k$, $2x - 5 = 13 - x$

c) $\frac{x}{2} + 6 = k$, $\frac{x}{3} - 6 = k + 1$

d) $6x - 2k = 1 + 5x$, $x - k = 2x$

4) Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka s obvodom 21 cm, ktorého najkratšia strana má dĺžku 5 a dĺžka prostrednej je aritmetický priemer dĺžok zvyšných dvoch strán.

4.2.3 Správne postupovať pri riešení rovníc a nerovníc s neznámou v menovateli.

1) Najskôr zjednodušte zlomky a až potom riešte rovnicu:

a) $\frac{x^2-1}{x+1} = -2$

b) $\frac{2x-6}{9-x^2} = 1$

c) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-4x} = 12$

d) $\frac{6x-4}{9x-6} = x$

2) Riešte v *R* nerovnice:

a) $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - 0{,}5$

b) $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-2}{x+2}$

c) $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+3} \geq 2$

d) $\frac{(x-4).x^2}{1-x} < 0$

3) Riešte rovnice a urobte skúšku :

a) $\frac{x}{x-2}=-1$

b) $\frac{3x-5}{2x-7}=7$

c) $\frac{x-2}{x}=\frac{x+4}{x+3}$

d) $\frac{71-5x}{1-x}-\frac{5x-11}{x-11}=0$

e) $\frac{x^2-3x+8}{x-8}=x+53$

4.2.4 Riešiť jednoduché typy rovníc s neznámou v odmocnenci.

1) Riešte rovnicu:

a) $\sqrt{x^2+7}=x-1$

b) $\sqrt{x^2+7}=1-x$

c) $\sqrt{x^2+5x-21}=x+3$

d) $\sqrt{4x^2-7x+8}=3-2x$

2) Pre ktoré *k* majú rovnice koreň uvedený v zátvorke?

a) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x+k}$ $(x = 6)$

b) $\sqrt{x^2-2x+k}+x=1$ $(x = -1)$

3) Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti riešenia:

a) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-3}$

b) $2\sqrt{3z+6}=3\sqrt{2z-4}$

c) $3\sqrt{x+5}=x-5$

d) $\sqrt{x^2+15}=x+1$

e) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{10}$

f) $\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x+2}=1$

4.2.5 Riešiť jednoduché typy rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou.

1) Riešte rovnice v obore *Z*:

a) $|x-8|+3=2x$

b) $|6x+5|-|1-x|=0$

c) $3x-5=7-|5+x|$

d) $2x+|7-2x|=10$

e) $x-2|3x+6|=5-2x$

2) Vyriešte v R:

a) $|x-1| + |2x-3| < 5$

b) $|2x+5| \geq |7-4x|$

c) $\frac{1}{|x-1|} \geq \frac{2}{|1-x|} + 1$

3) Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{|x|-1}$.

4.2.6 Zapísať riešenie nerovnice pomocov intervalov.

1) Riešte v množine R nerovnice. Riešenie zapíšte pomocou intervalov.

a) $\frac{-3}{x+2} > \frac{2(x+1)}{3}$

b) $3 - \frac{x-1}{4} \geq 2 + \frac{3(x+1)}{8}$

c) $\frac{x+1}{2x-4} < 0$

d) $\frac{x-3}{1-x} \leq 0$

2) Riešte v množine R nerovnice. Riešenie zapíšte pomocou intervalov.

a) $\frac{-3}{x+2} > 0$

b) $\frac{x-5}{2x+8} > 0$

c) $\frac{x+1}{2x-4} < 0$

d) $\frac{x-3}{1-x} \leq 0$

e) $\frac{1}{x^2+4} > 0$

f) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq 0$

3) Ak M je množina, ktorá neobsahuje žiadne riešenie nerovnice

$$x + 2 < 2x - 3 < 3x + 4$$

tak M =

A $\{-1, 0, 1, 5, 6\}$ **B** N **C** $(-\infty, 5)$

D $(0, 15\rangle$ **E** Žiadna z možností A až D nie je správna

4.2.7 Poznať riešenie nerovnice $|x-a| < e$

1) Riešte v množine R nerovnice:

a) $|2x+1| < 5$ b) 0 < $|x+2| < -1$

Porovnajte výsledky oboch úloh

2) Riešte v množine *R* nerovnice:

a) $|2x+1| < 5$ b) $|x+2| < -1$

c) $|5-3x| < 0$ d) $|5-2x| > 3$

e) $|2x+3| > -2$ f) $|x+1| > 0$

4.2.8.Správne riešiť jednotlivé typy rovníc a nerovníc aj v podmnožinách množiny *R*.

1) Rovnicu $\frac{2x+4}{4} + 3(x+2)$ riešte:

a) v *Z* b) v (0, +∞) c) v *N*

2) Určte, ktoré prirodzené čísla vyhovujú nerovnici $\frac{2x+4}{4} + 3(x+2)$ < 0.

3) Pre ktoré záporné reálne čísla *x* nadobúda výraz $\frac{2x+4}{4} + 3(x+2)$ kladné hodnoty?

-

4) Nerovnicu $1 \le |x-2| < 4$ riešte:

a) v *Z* ∩ (–∞, 0⟩ b) v (0, +∞) c) v *N*

5) Rovnicu $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$ riešte:

a) v *Z* ∩ (–∞, 0⟩ b) v (0, +∞) c) v *N*

4.2.9 Ilustrovať na príkladoch geometrickú interpretáciu lineárnej nerovnice s 2 neznámymi.

1) Znázornite množinu všetkých koreňov nerovnice:

a) $x - y + 2 \ge 0$ b) $x - y + 2 < 0$

c) $x - y - 2 \ge 0$ d) $x - y - 2 < 0$

e) $x - y + 2 \le 0$ f) $x - y - 2 \le 0$

g) $2x - y + 2 \ge 0$ h) $2x - y - 2 < 0$

2) Napíšte lineárnu nerovnicu, ktorej grafickým riešením:

a) je polrovina ABC, kde $A[5, 6]$, $B[5, 11]$, $C[13, 18]$

b) je polrovina ABC, kde $A[5, 7]$, $B[75, 7]$, $C[13, 1]$

c) sú vnútorné body polroviny ABC, kde $A[5, 6]$, $B[5, 11]$, $C[3, 18]$

d) sú vnútorné body polroviny ABC, kde $A[5, 7]$, $B[75, 7]$, $C[13, 1]$

4.3.1 Efektívne riešiť sústavu 2 (3) lineárnych rovníc s 2 (3) neznámymi

1) Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc:

a) $2x + 3y = 12$
$3x - y = 7$

b) $2x + 3y = 1$
$4x + 6y = 3$

c) $x - 2y = 2$
$2x - 4y = 4$

2) Riešte v $R \times R \times R$ sústavu rovníc:

a) $x + 2y - z = 2$
$2x + y + z = 7$
$x + y + z = 6$

b) $2x + y + 17z = 4$
$x - y + 4z = 1$
$y + 3z = 4$

c) $x + 2y + z = 1$
$3x - z = 6$
$7x - 4y - 5z = 16$

3) Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc:

a) $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{3}{2}$
$\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{16}{y+3} = -1$
$\dfrac{6}{x-1} + \dfrac{88}{y+3} = 5$

c) $\dfrac{4}{x+2} = \dfrac{1}{y-2}$
$\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5}{y+2}$

4) Zo sústavy troch rovníc s tromi neznámymi poznáme dve rovnice:

$3x + y - 2z = 8$
$-6x - 2y + 4z = 16$

Hoci tretiu rovnicu nepoznáme, môžeme s istotou tvrdiť, že táto sústava rovníc v R^3:

a) nemá žiadne riešenie?

b) má práve jedno riešenie?

c) má nekonečne veľa riešení?

d) má buď práve jedno riešenie alebo má nekonečne veľa riešení, no bez poznania tretej rovnice to však nemožno rozhodnúť?

e) buď nemá riešenie alebo má nekonečne veľa riešení, no bez poznania tretej rovnice to však nemožno rozhodnúť?

5) Ktoré z uvedených tvrdení o sústave rovníc

$$x + y = a$$
$$ax + ay = a$$

s parametrom $a \in R$ je nepravdivé?

A Pre $a = 1995$ sústava nemá žiadne riešenie

B Pre $a = 2$ sústava nemá žiadne riešenie

C Pre $a = 1$ má sústava nekonečne veľa riešení

D Pre $a = 0$ má sústava práve jedno riešenie

E Ak má sústava aspoň dve rôzne riešenia, tak má nekonečne veľa riešení

4.3.2 Poznať grafické znázornenie sústavy 2 lineárnych rovníc s 2 neznámymi a chápať geometrický význam jej riešenia

1) Graficky riešte sústavy rovníc:

a) $2x - y = 5$
$4x - 3y = 8$

b) $2x + 3y = 1$
$4x + 6y = 3$

c) $4x - 3y = 1$
$-2x + y = 0$

d) $x - 2y = 2$
$2x - 4y = 4$

2) Riešte sústavy rovníc graficky i výpočtom:

a) $5x - y = 40$
$3x - y = 26$

b) $3x - 5y = 14$
$6x - 10y = 17$

c) $7x + 3y = 100$
$14x + 6y = 200$

3) Riešte graficky sústavy rovníc. Použite milimetrový papier, rovnice vhodne upravte:

a) $1{,}5x - 2y = 1$
$2{,}5x - 3y = 6$

b) $0{,}16x - 0{,}11y = 1$
$0{,}19x - 0{,}11y = 1$

c) $2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8$
$0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4$

d) $0{,}15 = 0{,}53 - 0{,}7x - 0{,}5y$
$0{,}13 + 0{,}5y = 0{,}59 - 0{,}9x$

4.3.3. Správne riešiť jednoduché typy nerovníc v súčinovom a podielovom tvare.

1) Určte všetky reálne čísla *x*, pre ktoré dané zlomky nadobúdajú nekladné hodnoty:

a) $\frac{3x+2}{2x-5}$ b) $\frac{x^2+3x}{2x-7}$ c) $\frac{2x-1}{x^2+2x-15}$

2) Určte definičný obor danej funkcie:

a) $f: y = \log(x^3 + 4x^2 - 32x)$ b) $f: y = \sqrt{x^3 - x^2 - 42x}$

3) Riešte v *R* nerovnice:

a) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21} < 0$ b) $\frac{2}{3} < \frac{2+x}{3+x}$ c) $\frac{5}{3} < \frac{5+y}{3+y}$

4) Určte definičný obor funkcie f : $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+1} + \sqrt{\frac{3}{x(x+2)}}}$

5) Určte definičný obor funkcie f : $y = \sqrt{4x - x^3}$

4.3.4. Graficky znázorniť riešenie sústavy lineárnych nerovníc s 2 neznámymi

1) Znázornite graficky množinu všetkých koreňov nerovnice s neznámymi *x, y*:

a) $2y - x \geq 0$ b) $-5x + 2 \leq 0$

c) $x + y > 0$ d) $y - 2x < 4$

2) Ukážte, že sústava nerovníc

$$x + y \leq 3$$
$$2x - y \geq 0$$
$$x + 2y \geq 5$$

má jediné riešenie.

3) Graficky vyriešte sústavu nerovníc:

a) $x + y \geq 2$ b) $x + y \leq 2$

$-5x+2y \geq 4$ $\qquad\qquad$ $-2x+3y \leq 1$

4) Znázornite množinu všetkých koreňov sústavy nerovníc:

a) a) $x - y + 2 \geq 0 x - y - 2 \leq 0$

b) b) $x - y + 2 \leq 0 x - y - 2 \geq 0$

c) c) $x - y - 2 \geq 0 2x - y - 2 \geq 0$

d) d) $x - y - 2 \leq 0 2x - y - 2 \geq 0$

5) Znázornite množinu všetkých koreňov sústavy nerovníc:

$4x + 3y \leq 12$ $\qquad$ $|y| \leq 2$

4.4.1. Efektívne riešiť všetky typy kvadratických rovníc

1) Riešte rovnicu s odmocninou:

a) $x = \sqrt{x} + 6$ b) $3 + x = \sqrt{29 - x^2}$

c) $\sqrt{x+3} + x = 9$ d) $2x - 1 = \sqrt{x^2 + 4x} - 5$

2) Riešte rovnicu:

a) $2x^2 + 9x = 0$ b) $3x^2 = 6x$

c) $4x^2 - 64 = 0$ d) $16 - 7x^2 = 79$

e) $1{,}8x^2 - 2 = 3$ f) $(2x - 3)^2 = 81 - 12x$

3) Riešte rovnicu:

a) $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 = 0$ b) $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{5}{2}$

c) $x\left(x - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}(x - 1) - \left(5 + \sqrt{3}\right) = 0$ d) $x^2 : (x^2 + 1) = 441 : 841$

e) $(2x + 3)(3x - 4) + (4x - 5)(5x + 6) = 10$ f) $2x^2 + 1{,}1x - 3{,}91 = 0$

4) Obvod kosoštvorca je 104, obsah 480. Určte dĺžku uhlopriečok.

5) Nájdite dve čísla tak, aby sa ich súčet rovnal 10 a súčin 1.

4.4.2.Poznať a aplikovať vzťahy medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice

1) Určte spamäti druhý koreň kvadratickej rovnice, ak prvý poznáte. Niektoré rovnice majú utajený koeficient:

a) $x^2 + 4x - 2 = 0$, $x_1 = 2$

b) $3x^2 + 11x - 11 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x^2 + \mathbf{H}x + 14 = 0$, $x_1 = -7$

d) $x^2 + 6x + \mathbf{H} = 0$, $x_1 = -2$

e) $5x^2 - \mathbf{H}x - 21 = 0$, $x_1 = -6$

f) $-x^2 + 3x + \mathbf{H} = 0$, $x_1 = 21$

2) Nájdite kvadratickú rovnicu, ktorá má korene *r, s*, ak:

a) $r = 4$, $s = -7$

b) $r = 3 + \sqrt{5}$, $s = 3 - \sqrt{5}$

c) $r = 6$, $s = \sqrt{6}$

d) $r = 2$, $s = -5$ a lineárny koeficient sa rovná 10

e) $r = -0{,}5$; $s = 8$ a kvadratický koeficient sa rovná 4

3) Bez toho, aby ste danú rovnicu s koreňmi x_1, x_2 riešili, nájdite kvadratickú rovnicu s koreňmi v zátvorke:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$, $(y_1 = 3x_1, y_2 = 3x_2)$

b) $2x + 11x^2 - 13 = 0$, $(y_1 = x_2 - 6, y_2 = x_1 - 6)$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$, $\left(x_1 = \frac{1}{y_1}, x_2 = \frac{1}{y_2}\right)$

4) Ak $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, tak rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má:

A dva reálne korene, z ktorých jeden je záporný a jeden kladný

B dva reálne korene, pričom obidva sú kladné

C dva reálne korene, pričom obidva sú záporné

D má práve jeden reálny koreň, ktorý je záporný

E nemá žiadne reálne korene

4.4.3. Poznať úlohu *diskriminantu* kvadratickej rovnice

1) Určte druh koreňov danej rovnice:

a) $x^2 - 7x - 30 = 0$

b) $x^2 + 5x - 2346 = 0$

c) $3x^2 + 23x - 70 = 0$

d) $5x^2 - 18x + 6 = 0$

e) $12x^2 - 20x - 25 = 0$

f) $62x^2 - x + 1 = 0$

2) Pre ktoré b nemá rovnica $3x^2 - bx + b + 5 = 0$ riešenie v množine R?

3) Určte hodnotu parametra $p \in R$ tak, aby rovnica $x^2 - px + 9 = 0$ mala aspoň jeden reálny koreň.

4.4.4. Rozložiť na súčin kvadratický trojčlen

1) Upravte kvadratický trojčlen na tvar $(X \pm A)^2 \pm B$:

a) $x^2 + 2x + 5$

b) $x^2 - 10x$

c) $x^2 - 18x - 7$

d) $x^2 - 4{,}2x + 10$

e) $x^2 + 3x - 1$

f) $x^2 - x$

g) $6 - 68x + x^2$

h) $x^2 + 1{,}2x + 8$

2) Upravte kvadratický trojčlen na tvar $(X - A)^2 + B$:

a) $x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x + 13$

$x^2 + 6x + 2$

b) $x^2 + x + 0{,}25$

$x^2 + x + 1$

$x^2 + x - 1$

c) $x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$

$x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{7}{9}$

$x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}$

3) Upravte na súčin vypočítaním koreňov kvadratickej rovnice:

a) $x^2 + 2x - 63$

b) $48 - 16x + x^2$

c) $x^2 + 7x - 1$

d) $2x^2 + 7x - 9$

e) $7 - 5x^2 + 2x$

f) $x^2 + 3x + 7$

g) $4x^2 + 4x + 1$

4) Rozložte na súčin:

a) $x^2 + 7xy - 12y^2$

b) $3x^2 - 5xy + 2y^2$

5) Riešte rovnice. Najskôr ich upravte:

a) $\frac{x^2 + 31x}{x} = 1 + x$

b) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x^2$

c) $x = \frac{4x + 8}{x^2 + 5x + 6}$

d) $9 = \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^2 + 5x + 2} - x$

4.4.5 Poznať a využívať súvis medzi riešením kvadratickej nerovnice a grafom kvadratickej funkcie

1) Pri riešení kvadratickej nerovnice využite graf kvadratickej funkcie:

a) $x^2 - 1 \geq 0$

b) $x^2 - 1 < 0$

c) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ d) $x^2 + 2x - 3 < 0$

e) $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$ f) $-x^2 - 4x - 3 < 0$

2) S využitím grafov kvadratickej funkcie riešte nasledujúce nerovnice:

a) $x^2 - 9x + 14 \geq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$

c) $x^2 + 4x + 9 \leq 0$ d) $x^2 - 6x + 7 < 0$

3) Riešte nerovnicu:

a) $x^2 - x - 12 < 0$ b) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ d) $4x^2 > 12x$

e) $2x^2 + 3x + 4 > 0$ f) $4x - x^2 > 12$

g) $x(x - 2) \leq 2x - 4$ h) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + \frac{7}{3} < \frac{(x-3)^2}{6} + 3x$

4.4.6. Správne riešiť sústavu lineárnej a kvadratickej rovnice s 2 neznámymi.

1) Pre $x, y \in$ R riešte sústavy rovníc:

a) $x - y = 27$, $x^2 - y = 0$ b) $2x - y = 0$, $y - x^2 = 1$ c) $x^2 - y = -3$, $x - 2y = 1$

2) Pre $x, y \in$ R riešte sústavy rovníc:

a) $x - 2y + xy = 27$, $x - y - 3 = 0$ b) $x^2 + 4y^2 = 10$, $x + 6y - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3y^2 - 5x - 2y = 26$, $x - y = 4$ d) $x^2 + y^2 + 4\mathbf{x} - 2y = 0$, $x - y = 2$

3) Riešte sústavy rovníc výpočtom i graficky:

a) $y = x^2 - x$, $y = 3x - 3$ b) $y = 3x^2 + x + 1$, $y = 2x - 8$

c) $y = 5x^2 - 7$, $y = 4x - 10$ d) $y = 2 - 5x - 5x^2$, $y = 3x^2 + 7x + 2$

4) Riešte sústavy rovníc:

a) $x + y = 7$

$x^2 + y^2 = 37$

b) $xy + 21 = 0$

$x - y = 10$

c) $x^2 + y^2 + 2x = 9$

$x^2 + y^2 - 6y = 11$

d) $x^2 + yx = 35$

$x + 3y = 1$

5) Nájdite súradnice všetkých bodov kružnice $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ a priamky $y = 2x$.

4.5.1. Riešiť základné goniometrické rovnice v *R*

1) Spamäti určte v oblúkovej miere všetky x vyhovujúce rovnici:

a) $\sin x = a$ b) $\cos x = a$

ak $a \in M_1 = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -2\right\}$

2) Spamäti určte v oblúkovej miere všetky x vyhovujúce rovnici:

a) $\mathrm{tg}\, x = a$ b) $\mathrm{cotg}\, x = a$

ak $a \in M_2 = \left\{0, 1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

4) Určte všetky $x \in (0; 2p)$, ktoré vyhovujú rovnici:

a) $\sin x = 0{,}8361$ b) $\cos x = -0{,}5656$

c) $\mathrm{tg}\, x = 1{,}256$ d) $\mathrm{cotg}\, x = -1{,}256$

5) Riešte v *R* rovnicu:

a) $\sqrt{3}\,.\mathrm{tg}\, x = -3$ b) $2 \sin \frac{x}{3} = \sqrt{3}$

c) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ d) $\sin \left(x - \frac{p}{4}\right) = 0$

e) $\mathrm{tg} \left(\frac{3}{4}x - \frac{p}{3}\right) = -\sqrt{3}$ f) $\sin \left(x + \frac{p}{4}\right) = 1$

g) $\mathrm{cotg} \left(2x - \frac{p}{4}\right) = -1$ h) $\mathrm{tg} \left(x + \frac{p}{3}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

i) $\cos \left(3x - \frac{p}{2}\right) = 0{,}5$

4.5.2 Vysvetliť postup pri riešení zložitejších goniometrických rovníc, pri riešení aplikovať goniometrické vzorce a vlastnosti goniometrických funkcií

1) Riešte v R:

a) $2.\sqrt{3}\,\text{cotg}\,(2x + \frac{p}{3}) = -2$

b) $\frac{5+\sin x}{1-\sin x} = 3$

c) $\text{cotg}^2\, x = \sqrt{3}\,\text{cotg}\, x$

d) $3.\text{tg}^2\, x = 1$

e) $4.\cos^2 x - 4.\cos x - 3 = 0$

f) $(2.\cos x + 1).\cos x = 1$

g) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$

2) Riešte v R :

a) $\sin 2x + \cos x = 0$

b) $\sin x - \cos 2x = 0$

c) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

d) $2.\cos^2 x = \text{cotg}\, x$

e) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$

3) Riešte v R:

a) $3.\sin^2 x = \cos^2 x$

b) $3.\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$

c) $\text{tg}\, x - 3\,\text{cotg}\, x = 0$

d) $\text{tg x} - \text{cotg}\, x - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

e) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{\sin^2 x} + \text{cotg}\, x - 1 = 0$

g) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos \text{x})^2 = 1 - \cos 2x$

4) Určte, pre ktoré reálne x dané funkcie nadobúdajú hodnoty rovné nule:

a) $f : y = \sqrt{3}\ \text{tg}^2\, x + 2\,\text{tg}\, x - \sqrt{3}$

b) $f : y = \text{tg}\, x - \text{cotg}\, x - \frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $f : y = 2.\text{tg}\, x - \frac{1}{\cos^2 x}$

4.5.3 S použitím jednotkovej kružnice alebo grafu funkcie vyriešiť jednoduché goniometrické nerovnice

1) Použitím jednotkovej kružnice určte všetky $x \in R$, ktoré vyhovujú nerovnici:

a) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg}\, x \geq 1$

d) $\text{cotg}\, x < \sqrt{3}$

2) Riešte v R rovnice a nerovnice:

a) tg $x = 1$

b) $|\text{tg } x| = 1$

c) tg $x \leq 1$

d) tg $x > 1$

e) $|\text{tg } x| < 1$

f) $|\text{tg } x| \geq 1$

3) Využite jednotkovú kružnicu a vyriešte v R nerovnicu sin $x >$ cos x.

4) Určte všetky $b \in R$, pre ktoré má rovnica $|\cos x| = b$ s neznámou $x \in \langle -2p ; 2p \rangle$

a) a) prázdnu množinu všetkých riešení;

b) b) aspoň šesť rôznych koreňov;

c) c) aspoň jeden, no najviac päť rôznych koreňov.

5) Riešte v R nerovnice:

a) $\sin \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$

b) tg $2x > -1$

c) $\cos\left(\frac{p}{6} - 2x\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) cotg $3x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.6.1 Správne riešiť základné exponenciálne a logaritmické rovnice

1) Riešte v *R*:

a) $2^x = 16$ b) $5^x = \frac{1}{25}$ c) $3^x = \sqrt{27}$ d) $0{,}5^x = \sqrt[3]{4}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ f) $5^{-x} = 0{,}008$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$ h) $2^x = -4$

i) $10^x = 0{,}001$ j) $0{,}01^x = \sqrt[3]{10}$ k) $\sqrt{100^x} = 10^{-1}$ l) $3^x.2^x = 216$

m) $7^{1-x}.4^{1-x} = \frac{1}{28}$ n) $3^{0{,}5(x-5)} = 3\sqrt{3}$ o) $\left(\frac{2}{3}\right)^x.\left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ p) $4^{v+1} = 1$

r) $0{,}7^{5+4v} = 1$ s) $3^{v^2-5v+6} = 1$ t) $\left(\sqrt{3}\right)^x.\left(\sqrt{12}\right)^x = \frac{1}{6}$ u) $2^{2x-1} = 8$

v) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x}$ w) $10^{x^2-x-6} = 1$ x) $2^x.5^x = 0{,}1.10^{2x-3}$ y) $9^{\sqrt{x+2}} = 27.3^{\sqrt{x+2}}$

z) $\frac{3^{x^2}}{3^{3x-36}} = 9^{2x-3}$ ž) $\frac{5^{x^2}}{25^{x+5}} = 25^3.5^{4x}$

2) Riešte v *R* nerovnice:

a) $2^x > 8$ b) $3^x < \sqrt{3}$

c) $0{,}5^x > 4$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$

e) $5^x > 0$ f) $0{,}2^x < -1$

3) Určte *x*, ak platí:

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_8 x = \frac{2}{3}$

c) $\log\ x = -2$ d) $\log_4 x = -\frac{2}{3}$

4) Určte *x*, ak platí:

a) $\log_x 16 = 2$ b) $\log_x \frac{1}{27} = -3$

c) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

5) Určte x, ak platí:

a) $\log_2 8 = x$ b) $\log_3 \frac{1}{27} = x$

c) $\log_5 \sqrt{125} = x$ d) $\log_8 \frac{1}{4} = x$

e) $\log 10^6 = x$ f) $\log \sqrt[3]{100} = x$

4.6.2 Aplikovať vlastnosti exponenciálnych a logaritmických funkcií (prostosť a monotónnosť) pri riešení exponenciálnych a logaritmických rovníc

1) Riešte v R:

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$ b) $3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$

c) $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} = 42$ d) $5^{x+1} - 15.\ 5^{x-1} = 1250$

e) $3^{2x} - 10.\ 3^x + 9 = 0$ f) $4^x - 6.\ 2^x = 160$

g) $4^x + 2^{x+1} = 80$ h) $9^{x+1} + 8.\ 3^x - 1 = 0$

2) Riešte v R:

a) $\log_3(x + 5) = \log_3(2x - 1)$ b) $\log_5(x^2 - 17) = \log_5(x + 3)$

c) $\log(x + 3) + \log(x - 3) = 2.\log(x + 1)$ d) $\log_2(4x - 4) - \log_2(3 - x) = 2$

e) $\log(2x + 9) - 2.\log x + \log(x - 1) = 2 - \log 50$

f) $\log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 \sqrt{x+2} = 1$

3) Riešte v R:

a) $(\log_3 x)^2 - 3.\log_3 x - 10 = 0$ b) $2.\log x = 3 + \frac{2}{\log x}$

c) $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

4) Riešte v R rovnicu: $\log(2x - 6) = 2.\log x - \log(x - 4)$

4.6.3. Vysvetliť riešenie exponenciálnej rovnice pomocou jej logaritmovania

1) Riešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $5^x = 3$

b) $8^{x+1} = 0{,}1$

c) $2^{-2x+7} = 10^{-3x+5}$

d) $4^{x+2} = 5^{x+1}$

2) Riešte rovnice s neznámou $u \in R$:

a) $u^u = u$

b) $u^{\log u + 2} = 1000$

c) $u^{\log_2 u + 2} = 8$

d) $u = 10^{1-0{,}25.\log u}$

3) Vzorec $m = m_0.(0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ vyjadruje závislosť hmotnosti m rádioaktívnej látky pri jej rádioaktívnej premene od času t. Počiatočná hmotnosť látky je m_0, polčas rozpadu (t.j. čas, za ktorý sa hmotnosť zmenší na polovicu pôvodnej hodnoty) je T. Aká stará je drevená soška, ak obsahuje 68% pôvodného množstva rádioaktívneho uhlíka ${}^{14}_{6}C$, ktorého polčas rozpadu je 5570 rokov?

5. Funkcie

5.1.1 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *funkcia, predpis funkcie, obor definície a obor hodnôt, argument, funkčná hodnota* a *graf funkcie*

1) 1) Daná je množina $M = \{0, 1, 2, ..., 10\}$. Rozhodnite, či nasledujúce predpisy definujú funkciu f :

a) f priraďuje prvku z M jeho tretiu mocninu,

b) f priraďuje prvku z M jeho druhú odmocninu,

c) f priraďuje prvku z M jeho prevrátenú hodnotu.

Pri funkciách určte aj obor definície a obor hodnôt.

2) Určte definičný obor funkcie:

a) f: $y = 2x + 3$

b) $g : y = \dfrac{1}{2x+3}$

c) $h : y = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$

d) $i : y = \dfrac{x+1}{x^2-6x-16}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x^2}}$

f) $y = \sqrt{|x|-1}$

3) Nech f je funkcia definovaná na množine celých kladných čísel tak, že každému $x \in Z^+$ priradí funkčnú hodnotu podľa predpisu f: $x \to 2x$.

a) Vypočítajte $f(4)$, $f(19)$ a $f(301)$.

b) Určte hodnoty premennej x, pre ktoré funkcia nadobúda hodnoty $f(x) = 14$, $f(x) = 15$, $f(x) = -214$, $f(x) = 214$.

c) Načrtnite graf funkcie f.

d) Rozhodnite, či je f prostá funkcia.

e) Existujú nejaké celé kladné čísla, ktoré nepatria do oboru hodnôt funkcie f ? Ak áno, uveďte príklad.

f) Určte obor hodnôt funkcie f .

g) Načrtnite graf funkcie f.

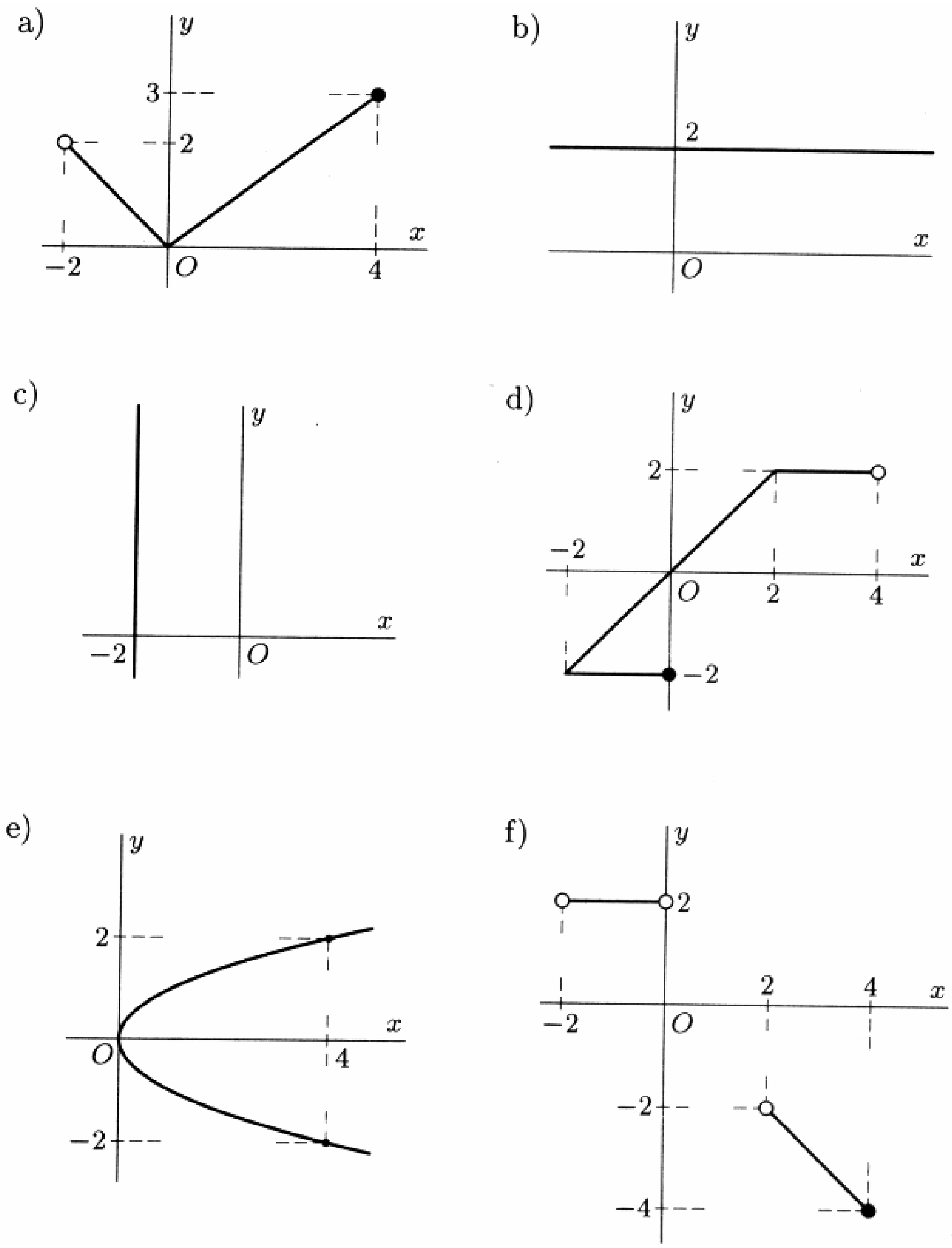
4) Zistite, či sa funkcie $f : y = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ a $g : y = \dfrac{x+1}{x-1}$ rovnajú.

5) Ak vyhodíme kameň kolmo hore rýchlosťou v m.s^{-1}, jeho maximálna výška bude približne vyjadrená vzťahom $h = f(v) = \frac{1}{20} v^2$.

a) Vypočítajte polovicu maximálnej výšky, ktorú kameň dosiahne, ak bol vyhodený postupne rýchlosťami 10 m.s^{-1}, 20 m.s^{-1}, 30 m.s^{-1}.

b) Akou rýchlosťou má byť kameň vrhnutý kolmo hore ak má dosiahnúť vzdialenosť od bodu vrhu aspoň 125 m?

6) Rozhodnite, ktorý z grafov, znázornených na nasledujúcom obrázku, je grafom funkcie. Pri funkciách určte aj obor definície a obor hodnôt.



5.1.2 Rozoznať v slovnom texte funkčnú závislosť a matematicky ju sformulovať

1) Akou funkciou času je dráha telesa. ktoré sa pohybuje rovnomerne tak, že za jednu sekundu prejde dráhu

a) 10 cm b) 1 m c) a km

2) Vyjadrite závislosť veľkosti uhla, o ktorý sa otočí

a) veľká b) malá

hodinová ručička, od času *t*.

3) Do gule s polomerom *r* je vpísaný rotačný kužeľ. Vyjadrite jeho plášť *Q* ako funkciu jeho strany *s*. V ktorom intervale premennej *s* je *Q* definované?

4) Na prevod teploty t_C z Celziovej stupnice na teplotu vo Fahrenheitovej stupnici platí vzťah $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$. Akou funkciou teploty v Celziovej stupnici je teplota odmeraná vo Fahrenheitovej stupnici?

-

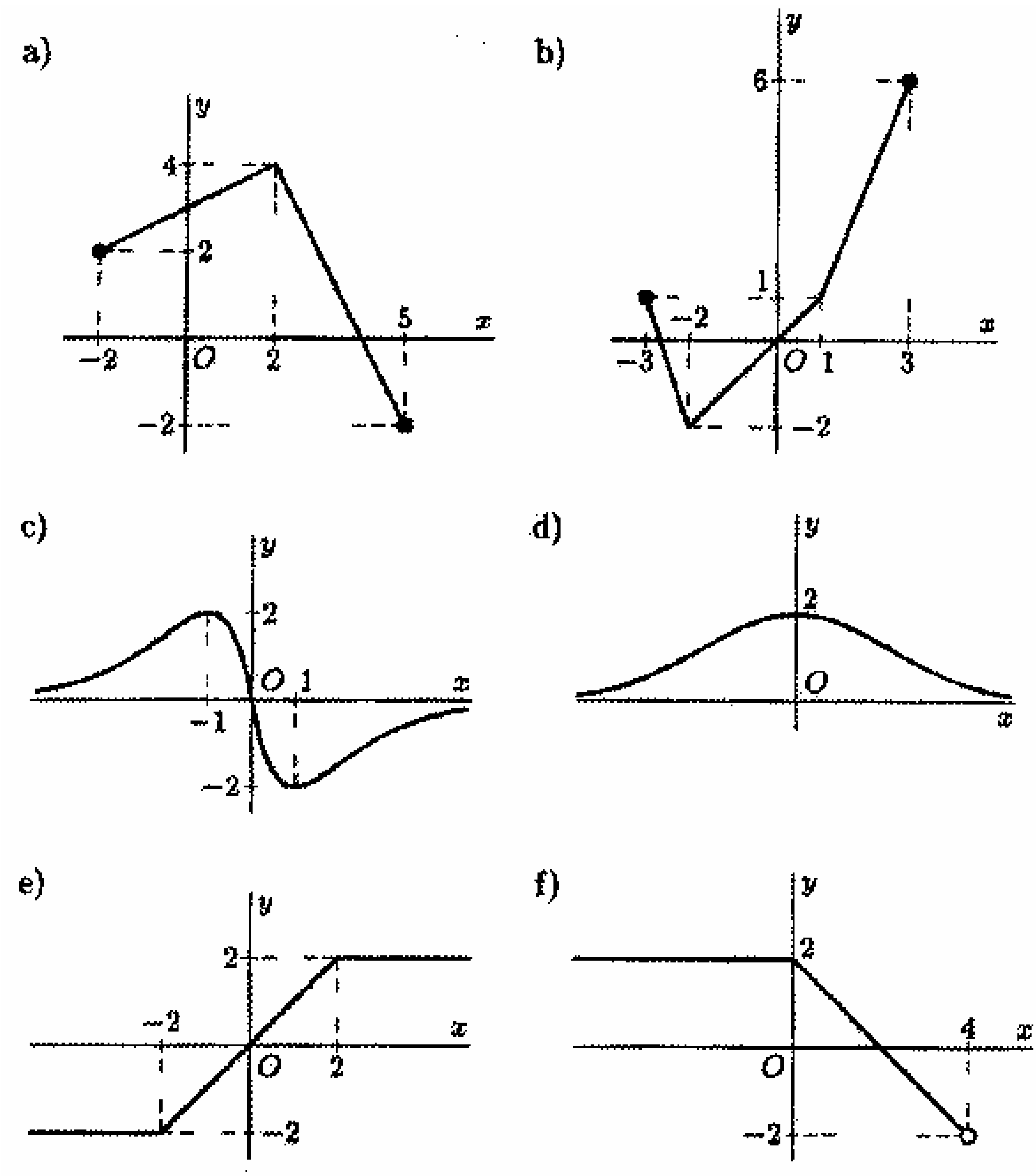
5) Rozhodnite, či je daná závislosť funkciou:

a) Závislosť množstva vody v nádrži od času, ak do nádrže pritečie každú hodinu 10 hektolitrov vody.

b) Závislosť veku človeka od jeho telesnej výšky.

5.1.3 Určiť (aspoň z grafu funkcie) vlastnosti funkcie (monotónnosť, lokálne extrémy, párnosť a nepárnosť, ohraničenosť, periodičnosť)

1) Určte intervaly monotónnosti a extrémy funkcií znázornených na obrázku 1.



Obr. 1

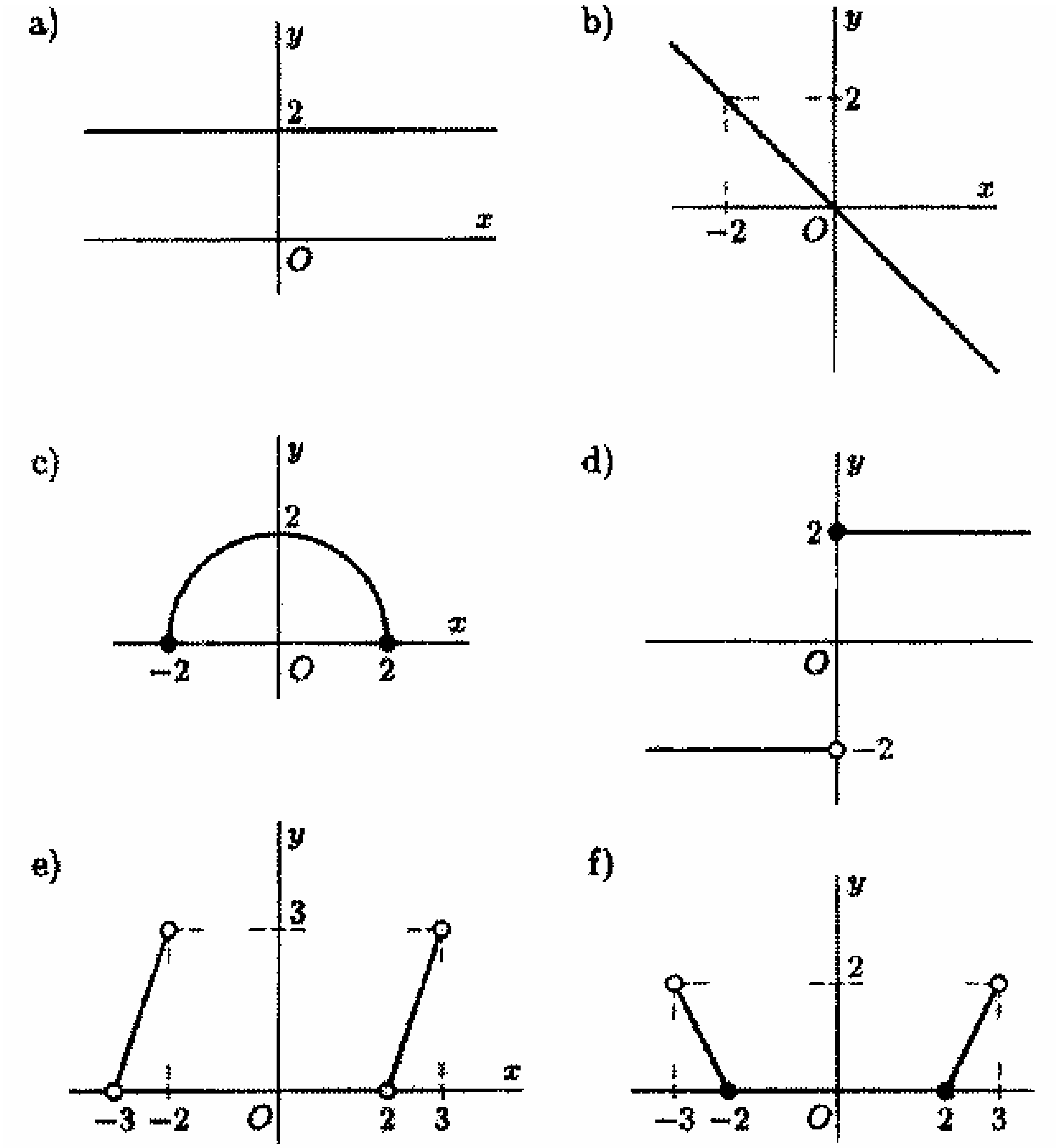
2) Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti nasledujúcich funkcií

a) $y = x|x|$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

c) $y = 1 + \sqrt{x}$

3) Rozhodnite, ktoré z funkcií znázornených na obrázkoch 1 a 2 sú párne alebo nepárne.



Obr. 2

4) Čo môžete povedať o hodnote $f(0)$, ak je známe, že f je funkcia

a) párna   b) nepárna?

5) Čo musí platiť o koeficientoch a, b, ak je známe, že funkcia $f(x) = ax + b$ je

a) párna   b) nepárna?

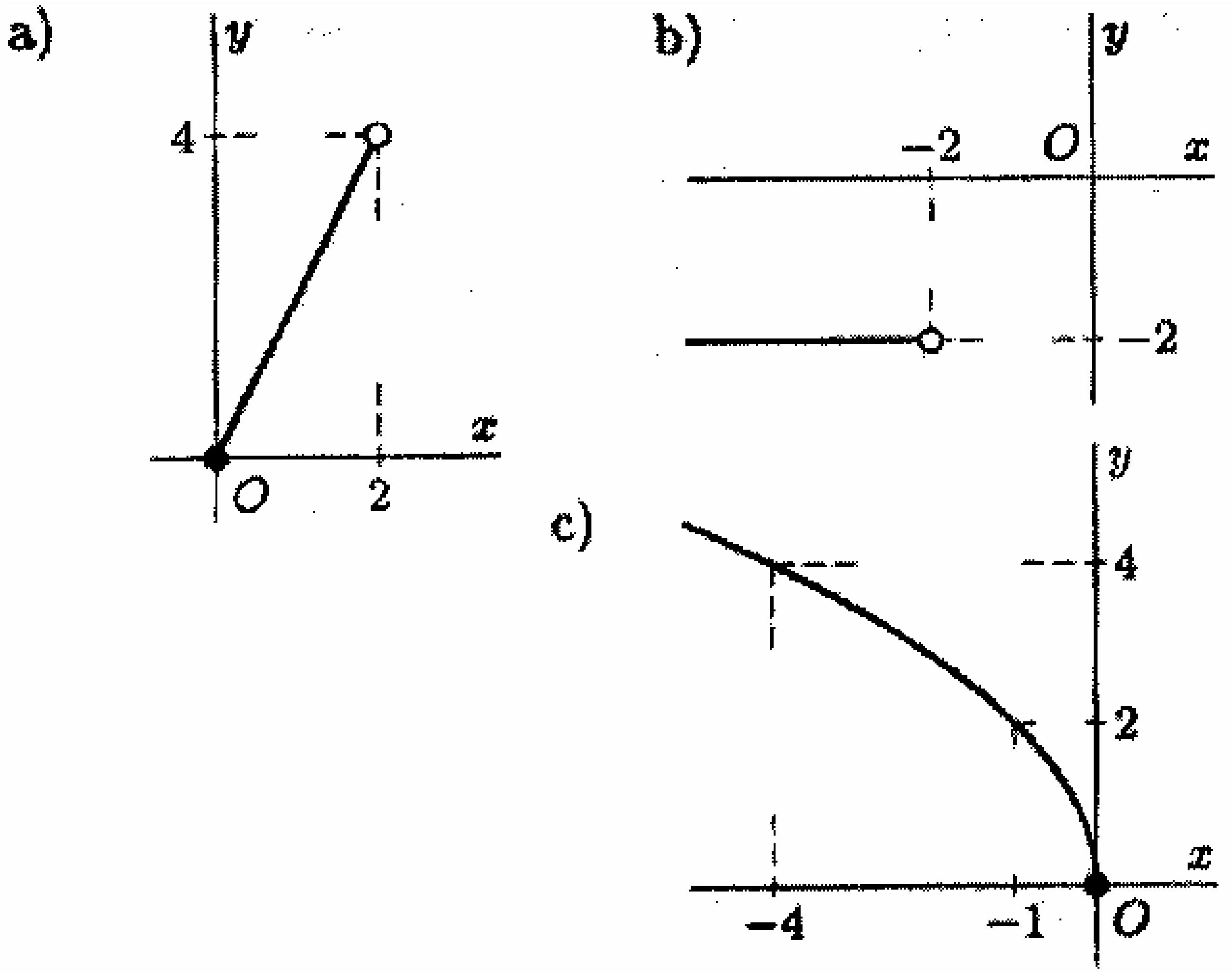
6) Rozhodnite, či sú nasledujúce funkcie ohraničené:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ b) $y = \sin \log x$

7) Načrtnite graf funkcie tak, aby táto funkcia bola periodická. Určte aj jej periódu.

8) Doplňte grafy na obrázku 3 tak, aby znázorňovali

a) párne funkcie b) nepárne funkcie



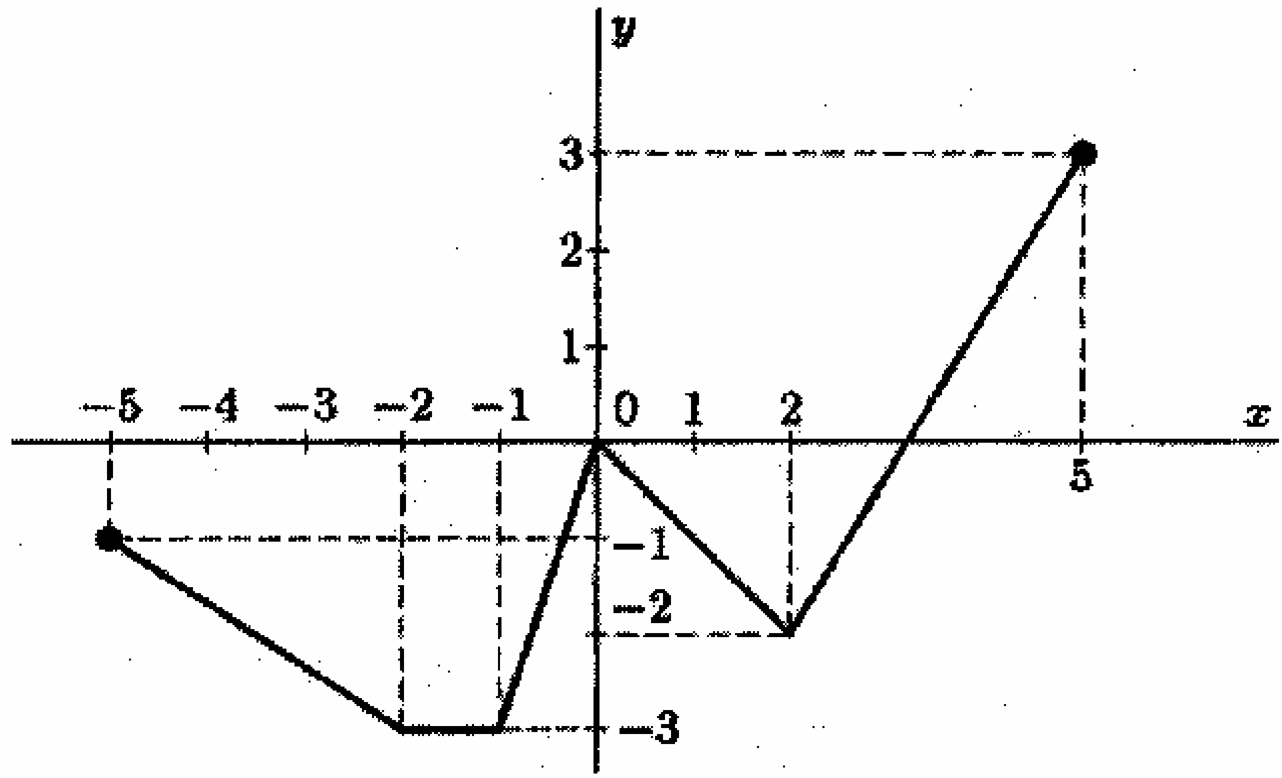
Obr. 3

9) Na obrázku 4 je znázornený graf funkcie *f*.

a) Určte jej vlastnosti (obor definície, obor hodnôt, intervaly monotónnosti, …).

b) Upravte časť grafu tak, aby nová funkcia bola na intervale <–5; 5> nepárna.

c) Upravte časť grafu tak, aby nová funkcia bola na intervale <–5; 5> párna.

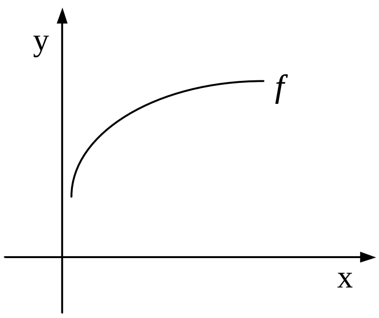


Obr. 4

5.1.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch princíp vytvorenia inverznej funkcie k prostej funkcii a aplikovať ho na jednoduché funkcie (lineárne, kvadratické, exponenciálne)

1) Určte inverznú funkciu k funkcii $y = x^2 - 1 \wedge x \in R^+$.

2) Načrtnite graf inverznej funkcie k funkcii f.



3) Určte inverznú funkciu (ak existuje) k funkcii f, nájdite definičný obor i obor hodnôt danej aj inverznej funkcie:

a) $f: y = 2x + 4 \ \wedge \ x \in \langle -2; 3)$

b) $f: y = |x|$

4) K danej funkcii *f* určte inverznú funkciu. Načrtnite aj grafy oboch funkcií v tej istej sústave súradníc.

a) $f: y = 2x - 4 \ \wedge \ x \in \langle 0; 6 \rangle$

b) $f: y = \frac{-3}{x},\ x \neq 0$

c) $f: y = x^2 \ \wedge \ x \in \langle 0; \infty)$

5.1.5 Načrtnúť, na základe poznania grafu funkcie *y = f(x)*, grafy funkcií *y = -f(x), y = f(x) + k, y =* │*f(x)*│*, y = f(x + q), y = f(x + q) + k*

1) Daná je funkcia $f(x) = y = x^2$. Načrtnite jej graf i graf funkcie:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(x) + 3$

c) $y = |f(x)|$

d) $y = f(x - 3)$

e) $y = f(x - 3) + 2$

2) Načrtnite graf funkcie *f*, ktorej $D(f) = (-2; 7\rangle$ a $H(f) = \langle -2; 3 \rangle$. Potom načrtnite aj graf funkcie:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(x) + 3$

c) $y = |f(x)|$

d) $y = f(x - 3)$

e) $y = f(x - 3) + 2$

5.2.1 Definovať lineárnu funkciu, poznať jej obor definície a obor hodnôt

1) Dané sú funkcie $f_1: x \to x-1$ a $f_2: x \to 1-x$. Určte $H(f_n)$, ak

a) $D(f_n) = R$ b) $D(f_n) = Z$

c) $D(f_n) = N$ d) $D(f_n) = \left(-3; 5\right\rangle$

2) K funkciám f a g určeným predpisom a jedným z oborov:

a) Určte druhý obor.
b) Načrtnite graf.
c) Vypočítajte priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami.

3) Vyjadrite závislosť veľkosti uhla u (v stupňoch), o ktorý sa otočí

a) veľká hodinová ručička,
b) malá hodinová ručička,

od času t (v minútach).

5.2.2 Načrtnúť graf funkcie $y = kx + q$ na základe geometrického významu parametrov k, q.

1) Načrtnite grafy nasledujúcich funkcií

a) $f: x \to 2-x$ b) $g: x \to 2x+1$

c) $h: y = 3x$ d) $2x + 3y - 6 = 0$

e) $3x - 2y - 6 = 0$ f) $4x - 5y = 20$

g) $14x - 12y = 21$, $x \in \langle -5; 10 \rangle$

2) Načrtnite graf lineárnej funkcie, ktorá prechádza bodom [3; 1] a so súradnicovou osou x zviera rovnaký uhol ako graf funkcie $y = 2x + 3$.

3) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = 2x-3,$ $f_2(x) = -2x+3,$ $f_3(x) = 2x+1,$

$f_4(x) = 0{,}5x+3,$ $f_5(x) = 2x+0{,}5;$ $f_6(x) = -x+3,$

$f_7(x) = \frac{1}{3}x-2,$ $f_8(x) = 3,$ $f_9(x) = \frac{1}{2}x-3$

Rozhodnite, ktoré grafy sú prvkami toho istého zväzku priamok so stredom na súradnicovej osi y (priamky patria do toho istého zväzku priamok, ak prechádzajú spoločným bodom - stredom zväzku).

4) Dokážte graficky, že nasledujúce sústavy rovníc nemajú riešenie:

a) $x + y = 1,\quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2$

b) $x - y = 4,\quad 2x - 2y = 5$

c) $x + y = 3,\quad y = \frac{7-2x}{2}$

5) Dokážte graficky, že nasledujúce sústavy rovníc majú nekonečne mnoho riešení:

a) $\begin{array}{l} x-y=5, \\ 3x=15+3y \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x+y=3, \\ \frac{x}{2}+0{,}5y=1{,}5 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x=4-y, \\ y=4-x \end{array}$

5.2.3 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

1) Daná je funkcia f : $y = -2x + 3$
   a) Určte $f(0)$, $f(3)$, $f(-5)$, $f(18)$.
   b) Určte, pre ktoré x sa $f(x) = 1$, $f(x) = -5$.
   c) Určte priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami x, y.
   d) Načrtnite graf funkcie f.

2) Podľa údajov výrobcu spotreba auta Vivace je 6 l benzínu na 100 km pri rýchlosti 80 km/h a 8,1 l pri rýchlosti 110 km/h. Odhadnite jeho spotrebu pri rýchlosti 90 km/h

3) Na výrobu jednej skrutky spotrebuje automat 20 mm tyče, ktorá má na začiatku dĺžku 4 metre. Funkcia $d = 4 - 0{,}02.p$ $(p \in N \cup \{0\},\ p \le 200)$ udáva závislosť dĺžky zvyšnej časti tyče od počtu zhotovených skrutiek.
   a) Určte dĺžku zvyšnej časti tyče po vyrobení 10, 50, 150, 160 a 220 kusov skrutiek.
   b) Určte počet vyrobených skrutiek, ak zvyšná časť tyče má dĺžku 10 mm, 50 mm, 150 mm, 160 mm a 220 mm.

4) Daná je funkcia k : $y = |2x+6| + |4-2x|$.
   a) Určte $k(-3)$, $k(0)$, $k(1)$, $k(4)$.
   b) Určte x, ak $k(\mathrm{x}) = 11$, $k(\mathrm{x}) = 10$, $k(\mathrm{x}) = 12$, $k(\mathrm{x}) = 5$, $k(\mathrm{x}) = -2$.

5.2.4 Rozhodnúť o monotónnosti lineárnej funkcie podľa hodnoty parametra *k*

1) Dokážte, že funkcia $y = \frac{4}{3}x + 1$ je na svojom definičnom obore rastúca.
2) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = 2x - 3,$ $f_2(x) = -2x + 3,$ $f_3(x) = 2x + 1,$

$f_4(x) = 0{,}5x + 3,$ $f_5(x) = 2x + 0{,}5;$ $f_6(x) = -x + 3,$

$f_7(x) = \frac{1}{3}x - 2,$ $f_8(x) = 3,$ $f_9(x) = \frac{1}{2}x - 3$

   a) a) Rozhodnite, ktoré z daných funkcií sú rastúce (klesajúce).
   b) b) Rozhodnite, ktoré grafy sú navzájom rovnobežné priamky.

3) Určte niekoľko konkrétnych hodnôt parametra $a \in R$ tak, aby funkcia $y = ax + b$
   a) a) bola rastúca na množine R,
   b) b) bola klesajúca na množine R,
   c) c) ani nerástla, ani neklesala na množine R.

5.2.5 Nájsť predpis lineárnej funkcie, ak sú dané jej body

1) Určte všetky lineárne funkcie, ktoré majú *D(f)* = *R* a ktorých prvkami sú usporiadané dvojice:

a) [0; 2], [1; 1]
b) [0; $\sqrt{3}$], [3$\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$]
c) [1; –1], [–2; 5]
d) [2; –2], [6; 0]

2) Určte predpis funkcie, ktorej grafom je priamka prechádzajúca bodom [1; 3] a rovnobežná s priamkou $y = -3x - 2$.

5.2.6 Zostrojiť graf lineárnej funkcie s absolútnymi hodnotami

1) Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = 2x - 4$
b) $y = 2|x| - 4$
c) $y = |2x - 4|$

2) Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti funkcie f : $y = x + |x|$, nakreslite graf a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf funkcie $y = |2x + 6| + |4 - 2x|$

4) Načrtnite graf funkcie $y = |2 - x| + |2x - 7| + 3.|1 + x| - 15,\ x \in \langle -3; 5 \rangle$

5.3.1 Definovať kvadratickú funkciu, poznať jej obor definície a obor hodnôt

1) Určte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť obsahu rovnostranného trojuholníka od dĺžky jeho strany. Určte aj obor definície a obor hodnôt tejto funkcie.

2) Nájdite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť objemu valca od priemeru jeho podstavy, ak výška $v = 5$ cm. Určte aj obor definície a obor hodnôt tejto funkcie.

3) Pri zvislom vrhu telesa smerom nahor sa výška s (v metroch) nad istým miestom menila s časom t (v sekundách) podľa vzťahu $s = 20 + 40t - 5t^2$. Určte maximálnu výšku, do ktorej teleso vystúpilo i čas trvania tohoto výstupu.

4) Určte obor definície a obor hodnôt funkcie:

a) $f_1(x) = (x+2)^2 - 1$ b) $f_2(x) = 1 - x^2$

c) $f_3(x) = 2 - (x-1)^2$ d) $f_4(x) + 2 = \frac{1}{2}(x-3)^2$

e) $f_5(x) = 4x^2 + 12x + 9$ f) $f_6(x) = -x^2 + 2x - 10$

5.3.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

1) Daná je funkcia f : $y = x^2 + 3x - 28$.
   a) Určte $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$.
   b) Určte hodnoty premennej x, pre ktoré platí, že $f(\mathrm{x}) = 42$, $f(\mathrm{x}) = -28$, $f(\mathrm{x}) = -35$, $f(\mathrm{x}) = -30{,}25$.
   c) Určte priesečníky grafu funkcie f so súradnicovými osami.

2) Daná je funkcia f : $y = x^2 - 4x - 12$.
   a) Určte $f(0)$, $f(7)$, $f(-1)$.
   b) Určte hodnoty premennej x, pre ktoré platí, že $f(\mathrm{x}) = 9$, $f(\mathrm{x}) = -20$, $f(\mathrm{x}) = -\frac{55}{4}$,
   c) Určte priesečníky grafu funkcie f so súradnicovými osami.

3) Určte všetky kvadratické funkcie s $D(f) = R$, ktorých prvkami sú usporiadané dvojice
   a) [0; 1], [2; –1], [1, –1] b) [3; 8], [1; –2], [–1; 4]

4) Ktorá kvadratická funkcia f má tú vlastnosť, že $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$?

5.3.3 Vysvetliť geometrický význam parametrov *a, c* v súvislosti s grafmi funkcií $y = x^2$ a $y = ax^2 + bx + c$

1) V jednej súradnicovej sústave načrtnite grafy daných funkcií a pokúste sa charakterizovať ich vzájomný vzťah:

a) $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 3x^2$, $f_3 : y = 0{,}3x^2$, $f_4 : y = -3x^2$

b) $g_1 : y = x^2$, $g_2 : y = x^2 - 3$, $g_3 : y = x^2 + 3$, $g_4 : y = -2x^2 + 3$

c) $h_1 : y = x^2, \quad h_2 : y = (x-3)^2, \quad h_3 : y = (x+3)^2, \quad h_4 : y = -(x-3)^2 - 2$

d) $k_1 : y = x^2, \quad k_2 : y = 2(x-3)^2 + 1, \quad k_3 : y = 2x^2 - 12x + 19, \quad k_4 : y = -2x^2 + 12x - 19$

2) Načrtnite graf funkcie $f:\ y = 2x^2 - 2$ a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite grafy funkcií:

a) $f : y = |x^2 - 2x - 2|$ b) $g : y = |-x^2 + 4x + 1|$

4) Aký má predpis kvadratická funkcia, ktorej graf je parabola s osou v osi $+y$ a vrcholom v začiatku sústavy súradníc? Ako znie rovnica tejto paraboly, keď je jej vrchol posunutý:

a) o dve jednotky v smere osi y,
b) o tri jednotky v smere osi $-y$,
c) o jednu jednotku v smere osi x,
d) o štyri jednotky v smere osi $-x$.

Ako bude znieť rovnica paraboly v prípadoch c) a d), ak os paraboly je rovnobežná s osou $-y$?

5.3.4 Nájsť vrchol a os paraboly, ktorá je grafom kvadratickej funkcie, určiť jej nulové body a načrtnúť ju

1) Nájdite súradnice vrcholu paraboly $y = -4x^2 + \frac{1}{3}x + 27$

2) Zostrojte graf funkcie $f:\ y = x^2 - 6x + 8$ a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf funkcie $h : x \to 4 - x^2, -3 \le x \le 1$ a nájdite jej extrémy.

4) Určte predpis funkcie, ktorej grafom je parabola s vrcholom $V[2; -3]$ prechádzajúca bodom $A[0; 1]$. Parabolu načrtnite a určte jej nulové body.

5.3.5 Určiť, podľa načrtnutého grafu, obor hodnôt a intervaly monotónnosti

1) Rozhodnite, či je funkcia $f:\ y = -x^2$ ohraničená a nájdite jej intervaly monotónnosti i obor hodnôt.

2) Načrtnite graf funkcie $f:\ y = x^2 - 4x,\ x \in \langle -2 ; 4)$. Určte jej obor hodnôt a intervaly monotónnosti.

3) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = x^2 + 2x - 15, \quad f_2(x) = x^2 - 4x + 6,$

$f_3(x) = 4x^2 + 12x + 9,$

$f_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}, \quad f_5(x) = -x^2 + 4x, \quad f_6(x) = -x^2 + 2x - 10,$

$f_7(x) = -x^2 + 4x - 4,$

a) Načrtnite ich grafy a určte obory hodnôt.
b) Určte intervaly monotónnosti a extrémy.
c) Zistite, kedy majú jednotlivé funkcie funkčné hodnoty kladné a kedy záporné.

4) Načrtnite graf funkcie $f: y = |x^2 - 6x + 8|$ a opíšte jej vlastnosti.

5) Načrtnite graf funkcie f: $y = |x^2 - x - 6| + 4$. Nájdite intervaly monotónnosti tejto funkcie.

5.3.6 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch súvislosť medzi hodnotami diskriminantu kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$

1) Daný je parametrický systém funkcií $y = x^2 - 3x + c$, kde $c \in R$. Slovne opíšte vzájomnú polohu všetkých funkcií daného parametrického systému. Určte c tak, aby táto funkcia
a) nemala spoločný bod s osou x,
b) mala práve jeden spoločný bod s osou x,
c) mala práve dva spoločné body s osou x.

2) Daná funkcia je funkcia $f: y = ax^2 - 2$. Vysvetlite, ako a či závisí počet prienikov grafu f s x-ovou osou od parametra a.

3) Určte hodnoty parametrov a, b, c predpisu kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ a hodnotu diskriminantu D kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ tak, aby grafom funkcie bola parabola, ktorá je:
a) obrátená *"nahor"* (má maximum) a pretína os x,
b) obrátená *"nahor"* (má maximum) a dotýka sa osi x,
c) obrátená *"nahor"* (má maximum) a nepretína os x,
d) obrátená *"nadol"* (má minimum) a pretína os x,
e) obrátená *"nadol"* (má minimum) a dotýka sa osi x,
f) obrátená *"nadol"* (má minimum) a nepretína x.

5.4.1 Definovať lineárne lomenú funkcie. opísať vzťah medzi lineárne lomenou funkciou a nepriamou úmernosťou

1) Načrtnite v tej istej súradnicovej sústave grafy funkcií: $f_1(x)=\frac{1}{x}$, $f_2(x)=-\frac{1}{x}$,
$f_3(x)=-\frac{1}{x}-1$, $f_4(x)=-\frac{x+1}{x}$, $f_5(x)=-\frac{1}{x+2}$, $f_6(x)=-\frac{1}{x+2}-1$, $f_7(x)=-\frac{x+3}{x+2}$
Určte aj obor definície a obor hodnôt každej tejto funkcie.

2) Obsah S pravouhlého trojuholníka je 12 cm^2. Určte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť medzi jeho odvesnami.

3) Pri konštantnom napätí je prúd nepriamo úmerný odporu vodiča. Nájdite funkciu, ktorá udáva túto závislosť, ak viete, že pri odpore 350 Ω je prúd 30 mA.

4) Obdĺžniková parcela s rozmermi a = 24 m, b = 15 m sa má vymeniť za stavebné miesto obdĺžnikového tvaru rovnakej výmery, a to s jedným rozmerom
a) 5 m, b) 30 m, c) 90 m.
Určte druhý rozmer.

5) Daná je funkcia $f(x)=\frac{1}{x}$. Načrtnite graf funkcie:
a) $g_1(x)=f(x)+1$ b) $g_2(x)=2.f(x)$ c) $g_3(x)=f(x+1)$
d) $g_4(x)=f(2x)$ e) $g_5(x)=f(x+1)+1$ f) $g_6(x)=f(-x)$

5.4.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

1) Doplňte tabuľku hodnôt

x	1	2	3	–3,5					10
f(x)					–1	10	4	–4	

pre funkcie:
$f_1(x)=\frac{1}{x}$; $f_2(x)=\frac{2}{x}$; $f_3(x)=-\frac{2}{x}$; $f_4(x)=-\frac{3{,}5}{x}$; $f_5(x)=\frac{1}{2x}$; $f_6(x)=-\frac{2}{3x}$;

2) Pri stálej sile (F = 60 N) je súčin tlaku (v Pa) a plochy (v m^2), na ktorú sila pôsobí konštantný. Doplňte tabuľku:

plocha v m²	1	2	3				12	15	
tlak v Pa				15	12	6			2

3) Pri napätí 220 V je odpor (v Ω) nepriamo úmerný intenzite (v A) elektrického prúdu. Doplňte tabuľku:

odpor v Ω	20	25	50			125	200		300
intenzita v A			4,4	2,9	2,2			0,9	

4) Daná je funkcia $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$. Určte:

a) $f(x)$ pre $x\in\{-5;-3;-1;1;2;5\}$,

b) x pre $f(x)\in\{-5;-3;-1;1;2;5\}$.

5.4.3 Určiť obor definície ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

1) Pumpou čerpajúcou 3,5 litra vody za sekundu sa vyčerpá stavebná jama za 10 hodín. Ako dlho bude čerpať vodu z tejto jamy pumpa, ktorá vyčerpá za sekundu 7 (10,5; 6; 25) litrov vody? Určte aj obor definície tejto funkcie.

2) Určte obor definície funkcie:

a) $f_1(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}$.

Viete určiť aj obor hodnôt jednotlivých funkcií?

3) Určte obor definície funkcie:

a) $f_1(x)=1-\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=1+\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=-\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}-2$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}+3$.

Viete určiť aj obor hodnôt jednotlivých funkcií?

5.4.4 Určiť nulové body grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

1) Určte všetky $x\in D(f)$, pre ktoré je $f(x)>0$.

a) $f_1(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}$.

2) Určte všetky $x\in D(f)$, pre ktoré je $f(x)<0$.

a) $f_1(x)=1-\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=1+\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=-\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}-2$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}+3$.

3) Načrtnite graf funkcie $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}+1\right|$.

5.4.5 Určiť asymptoty grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

1) Určte asymptoty funkcie:

a) $f_1(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}$.

2) Určte asymptoty funkcie:

a) $f_1(x)=1-\dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=1+\dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $f_3(x)=-\dfrac{6x-4}{6-9x}$;

d) $f_4(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}-2$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{-x+2}+3$.

3) Určte asymptoty funkcie a pomocou nich sa pokúste určiť obor hodnôt danej funkcie:

a) $f_1(x)=\dfrac{3}{3x-1}$; b) $f_2(x)=\dfrac{x}{4x-2}$; c) $f_3(x)=\dfrac{6x-4}{9x}$;

d) $f_4(x)=1-\dfrac{2x+3}{x-1}$; e) $f_5(x)=\dfrac{-x}{3x-1}$; f) $f_6(x)=\dfrac{2x-4}{x+2}$.

5.5.1 Definovať mocninovú funkciu (*y* = x^n, *n* Î *Z*), poznať jej obor definície

1) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = x;$ $\quad f_2(x) = x^2;$ $\quad f_3(x) = x^3;$ $\quad f_3(x) = x^4;$

$f_5(x) = x^{-1};$ $\quad f_6(x) = x^{-2};$ $\quad f_7(x) = x^{-3};$ $\quad f_8(x) = x^{-4}.$

Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru definície.

2) Určte obor definície nasledujúcich funkcií:

a) $f_1(x) = x^3;\quad f_2(x) = x^3 + 1;\quad f_3(x) = (x+1)^3;$

b) $f_1(x) = x^4;\quad f_2(x) = x^4 - 2;\quad f_3(x) = (x-2)^4;$

c) $f_1(x) = x^{-2};\quad f_2(x) = x^{-2} - 1;\quad f_3(x) = (x-1)^{-2};$

d) $f_1(x) = x^{-3};\quad f_2(x) = x^{-3} + 2;\quad f_3(x) = (x+2)^{-3}.$

3) Majme parametrický systém funkcií (vzhľadom na *n*) $y = x^n$, kde $n \in Z$ a $x \in R$. Bude sa medzi týmito funkciami nachádzať aj taká, ktorej grafom je **celá** priamka? Koľko bude takých funkcií a pri akom *n*? Bude medzi nimi aj funkcia $y = 1$?

5.5.2 Opísať na konkrétnych príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s párnym (nepárnym) *n*

1) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = x;$ $\quad f_2(x) = x^2;$ $\quad f_3(x) = x^3;$ $\quad f_3(x) = x^4;$

$f_5(x) = x^5;$ $\quad f_6(x) = x^6;$ $\quad f_7(x) = x^7;$ $\quad f_8(x) = x^8.$

a) Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru funkčných hodnôt.
b) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú párne alebo nepárne.
c) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú prosté alebo neprosté.
d) Určte ich intervaly monotónnosti.
e) Určte, ktoré z nich sú ohraničené zdola, ktoré zhora.
f) Určte ich maximum, resp. minimum.

2) Načrtnite graf funkcie

a) $y = x^{123}$

b) $y = x^3 + 5$

a zistite jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

a) $f_1(x) = x^3;\quad f_2(x) = x^3 + 1;\quad f_3(x) = (x+1)^3;$

b) $f_1(x) = x^4;\quad f_2(x) = x^4 - 2;\quad f_3(x) = (x-2)^4.$

4) Určte inverznú funkciu k funkcii $f: y = x^3$ (ak existuje), nájdite jej definičný obor i obor hodnôt a porovnajte ich s oborom definície a oborom hodnôt danej funkcie:

5.5.3 Opísať na konkrétnych príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s kladným (záporným) *n*

1) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = x;$ $f_2(x) = x^2;$ $f_3(x) = x^3;$ $f_3(x) = x^4;$

$f_5(x) = x^{-1};$ $f_6(x) = x^{-2};$ $f_7(x) = x^{-3};$ $f_8(x) = x^{-4}.$

a) Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru funkčných hodnôt.
b) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú párne alebo nepárne.
c) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú prosté alebo neprosté.
d) Určte ich intervaly monotónnosti.
e) Určte, ktoré z nich sú ohraničené zdola, ktoré zhora.
f) Určte ich maximum, resp. minimum.

2) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

a) $f_1(x) = x^{-2};$ $f_2(x) = x^{-2} - 1;$ $f_3(x) = (x-1)^{-2};$

b) $f_1(x) = x^{-3};$ $f_2(x) = x^{-3} + 2;$ $f_3(x) = (x+2)^{-3}.$

3) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

a) $f_1(x) = -x^4;$ $f_2(x) = x^{-4};$ $f_3(x) = -x^{-4};$

b) $f_1(x) = -x^5;$ $f_2(x) = x^{-5};$ $f_3(x) = -x^{-5}.$

5.6.1 Definovať exponenciálnu funkciu, poznať jej obor definície a obor funkčných hodnôt

1) Určte definičné obory a obory funkčných hodnôt funkcie

a) $y = 2^x$ b) $y = 3^x$

c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

2) Určte definičné obory a obory funkčných hodnôt funkcie

a) $y = 3^{x^2}$ b) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$

c) $y = \frac{1}{4^{x^2}}$ d) $y = \frac{1}{5^{\sqrt{5-x^2}}}$

3) Dané čísla porovnajte s číslom 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}}; \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}}; (2{,}36)^0; 0{,}8^{-\frac{2}{3}}; 3^{25}.$

5.6.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

1) Určte počet riešení rovnice v množine R:

a) $2^x = -0{,}5$ b) $2^x = \sqrt{3}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -0{,}2$

2) Riešte rovnice v množine R:

a) $2^x = 16$ b) $3^x = \sqrt{27}$ c) $5^x = \frac{1}{25}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ e) $0{,}5^x = \sqrt[3]{4}$ f) $5^{-x} = 0{,}008$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$ h) $2^x = -4$

3) Riešte nerovnice v množine R:

a) $2^x > 8$ b) $3^x < \sqrt{3}$ c) $0{,}5^x > 4$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$ e) $5^x > 0$ f) $0{,}2^x < -1$

4) Doplňte tabuľku hodnôt funkcie $f(x) = 2^x - 2$.

x	-4			-1		1		3	
$f(x)$		$-\frac{15}{8}$	$-\frac{7}{4}$		-1		2		14

5.6.3 Opísať na konkrétnych príkladoch súvislosť priebehu exponenciálnej funkcie s hodnotou jej základu *a*, s pomocou význačných bodov načrtnúť jej graf

1) Určte všetky $a \in R$, pre ktoré je funkcia $y = \left(\frac{2a-1}{a+2}\right)^x$ rastúca (klesajúca).

2) Rozhodnite, ktoré z uvedených výrokov sú pravdivé:

a) $\forall x \in R: \ x > 4 \Rightarrow 5^x > 5^4$

b) $\forall x \in R: 3^{x^2} > 3^x \Rightarrow x^2 < x$

c) $\forall x \in R: \left(\frac{1}{9}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \Rightarrow 2x > x - 1$

3) Zistite vzťah medzi číslami p, r v týchto prípadoch:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^p < \left(\frac{3}{7}\right)^r$,

b) $\left(\frac{8}{5}\right)^p < \left(\frac{8}{5}\right)^r$.

4) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti funkcie:

a) $f_1(x) = 3^x - 3$

b) $f_2(x) = 3^{x+1}$

c) $f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$

d) $f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$

5.6.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch súvislosť priebehu exponenciálnej a logaritmickej funkcie ako funkcií navzájom inverzných

1) Dané sú funkcie $f_1(x) = 3^x$ a $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

a) Určte ich funkčné hodnoty pre $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
b) Načrtnite ich grafy a opíšte vlastnosti.
c) Načrtnite grafy funkcií, ktoré sú k daným funkciám inverzné (ak existujú).
d) Určte predpis inverzných funkcií a opíšte ich vlastnosti.

2) K danej funkcii určte funkciu inverznú. Určte aj vlastnosti danej a k nej inverznej funkcie:

a) $f_1(x) = 4^x$

b) $f_2(x) = \log_5 x$

c) $f_3(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3) Zistite definičné obory funkcií:

a) $f_1(x) = \log_a(x+3)$ b) $f_2(x) = \log_{0,5}(-x)$

c) $f_3(x) = \log_5 \sqrt{x-4}$ d) $f_4(x) = \sqrt{\log_3 x}$

5.6.5 Definovať logaritmus a opísať pravidlá logaritmovania súčinu, podielu, mocniny a odmocniny

1) Určte:

a) $\log_7 49$ b) $\log_2 \frac{1}{4}$ c) $\log_{10} 0{,}1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ e) $\log_{10} 0{,}01$ f) $\log_2 \sqrt{2}$

g) $\log_{10} \sqrt{10}$ h) $\log_{10} \sqrt[5]{10000}$

2) Nájdite číslo x, ak platí:

a) $\log_2 x = 4$ b) $\log_{10} x = -1$ c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ e) $\log_5 x = 0$ f) $\log_6 x = 1$

g) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$ h) $\log_{0,1} x = 1$

3) Určte, pre ktorý základ z platí:

a) $\log_z 216 = 3$ b) $\log_z \frac{1}{27} = 3$ c) $\log_z \frac{1}{64} = -3$

d) $\log_z \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ e) $\log_z 10 = 6$ f) $\log_z 3 = 3$

g) $\log_z \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ h) $\log_z n = n$

4) Určte hodnotu výrazu x:

a) $x = \log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0{,}04$

b) $x = \log_5 625 + \log_2 64^3 + \log_3 \frac{1}{9}$

c) $x = \left(\log_{10} 0{,}1 + \log_{10}\left(\sqrt{10}\right)^3\right) .\ \log_{10} 100$

d) $x = 2.\log_3 \sqrt{27} - \log_3 1 + \log_3 \frac{1}{27} - \log_3 3$

5.6.6 Aplikovať pravidlá logaritmovania pri logaritmovaní i odlogaritmovaní výrazov

1) Určte x, ak

a) $\log_z x = \log_z a + \log_z b + \log_z c$

b) $\log_z x = \log_z a + \log_z b - \log_z c$

c) $\log_z x = 3.\log_z a + 2.\log_z b + 1$

d) $\log_z x = a.\log_z b + b.\log_z a - \log_z b - \log_z a$

e) $\log_z x = 3.\log_z a + (n+3)\log_z b - 3$

2) Určte $\log_z x$, ak

a) $x = \dfrac{a^2.\sqrt{tga}}{b^3.\sqrt[3]{c}}$

b) $x = a^{-2}.b^{-3}$

c) $x = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$

d) $x = \left(\sqrt{a}\right)^{\sqrt{a}}$

e) $x = \sqrt[n+1]{a^n.\sqrt[m]{b^{-1}}}$

f) $x = 3.m^{-1}.n^{-2}.p$

5.7.1 Definovať goniometrické funkcie *sínus*, *kosínus*, *tangens* a *kotangens*, poznať ich definičné obory, obory hodnôt, grafy a periódy

1) Rozhodnite, či je funkcia $f: y = \sin 2x$ ohraničená.

2) Daná je množina $HGF = \left\{\frac{2}{3}; 0{,}4; \frac{7}{5}; 1{,}5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0{,}5\right\}$. Bez použitia uhlomera a tabuliek zostrojte uhol α, ak

a) $\sin \alpha \in HGF$
b) $\cos \alpha \in HGF$
c) $\operatorname{tg} \alpha \in HGF$
d) $\operatorname{cotg} \alpha \in HGF$

3) Dokážte, že platí:

a) sin 20˚ = sin 740˚
b) cos 54˚ = cos(–1026˚)
c) sin 80˚ = sin(–1000˚)
d) cos(–1750˚) = cos 50˚
e) tg 75˚ = tg(–105˚)
f) cotg(–541˚) = cotg 359˚

4) Daná je množina $HGF = \left\{2; -0{,}45; \sqrt{4{,}1}; 0{,}8; -0{,}56; -5{,}6; 1{,}09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie:

a) $y = \sin x$
b) $y = \cos x$
c) $y = \operatorname{tg} x$
d) $y = \operatorname{cotg} x$?

5) Do ktorého z intervalov $\left\langle 0; \frac{p}{2}\right\rangle, \left\langle \frac{p}{2}; p\right\rangle, \left\langle p; \frac{3p}{2}\right\rangle, \left\langle \frac{3p}{2}; 2p\right\rangle$ patrí x, pre ktoré platí:

a) $\sin x = 0{,}8$ a zároveň $\cos x < 0$;
b) $\sin x \leq 0$ a zároveň $\cos x = -0{,}3$;
c) $\operatorname{tg} x > 0$ a zároveň $\sin x > 0$;
d) $\operatorname{cotg} x < 0$ a zároveň $\cos x > 0$;
e) $\sin x < 0$ a zároveň $\operatorname{cotg} x < 0$;
f) $\operatorname{tg} x < 0$ a zároveň $\cos x < 0$.

5.7.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

1) Určte obor definície funkcie:

a) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2} + 2.\cos x}$
b) $y = \sqrt{\sin x.\cos x}$
c) $y = tg(x + p)$
d) $y = \cot g\left(x - \dfrac{p}{3}\right)$

2) Doplňte tabuľku:

	x					
	45º	**-30º**	**780º**	**-315º**	**453º**	**-1210º**
sin *x*						
cos *x*						
tg *x*						
cotg *x*						

3) Vypočítajte:

a) $\cot g\frac{12}{8}p\ .tg11p\ .\cot g\frac{19}{3}p\ .tg(-7p)$

b) $\dfrac{tg\left(-\frac{p}{4}\right).\cot g\left(-\frac{p}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3}{2}p\right).\cos(-4p)}$

4) Usporiadajte podľa veľkosti čísla:

a) sin 60º, cos 60º, tg 60º, cotg 60º

b) $tg\frac{10}{3}p$, $\cot g\left(-\frac{2}{3}p\right)$, $\sin(-3p)$, $\cos 2p$

5) Určte v oblúkovej miere všetky *x* vyhovujúce rovnici:

a) sin *x* = *a*, pre $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -2\right\}$

b) cos *x* = *a*, pre $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -2\right\}$

c) tg *x* = *a*, pre $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

d) cotg *x* = *a*, pre $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

5.7.3 Načrtnúť graf goniometrickej funkcie tvaru *y* = *a.f*(*bx* + *c*) + *d*

1) V intervale $\langle -p, 3p\rangle$ načrtnite grafy funkcií:

a) $y = -\cos x$ b) $y = 3.\sin x$ c) $y = \sin x - 1$

d) $y = 2 - \cos x$ e) $y = \sin 2x$ f) $y = 2.\cos x + 3$

g) $y = \cos\frac{1}{2}x$ h) $y = |\sin x|$

2) V intervale $\langle -p, 3p\rangle$ načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \sin\left(x + \frac{p}{4}\right)$ b) $y = \sin\left(2x - \frac{1}{3}p\right)$ c) $y = 2.\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}p\right)$

d) $y = \cos\left(x - \frac{1}{4}p\right)$ e) $y = 2.\cos\left(0{,}5x + \frac{p}{4}\right)$ f) $y = 2.\cos\left(0{,}5x + \frac{p}{4}\right) - 1$

g) $y = -0{,}5.tg\left(2x + \frac{p}{6}\right)$

3) V intervale $\langle -p, 3p\rangle$ načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 3.\sin\left(2x - \frac{p}{4}\right)$ b) $y = 4.\sin\left(3x - \frac{3}{8}p\right)$ c) $y = \frac{1}{2}.\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}p\right)$

d) $y = 2.\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}p\right)$

5.7.4 Aktívne ovládať vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ tg\,x.\cot g\,x = 1,$

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

1) Bez použitia tabuliek i kalkulačky vypočítajte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak:

a) $\cos x = 0{,}6;\ x \in \left(\frac{1}{2}p, p\right);$

b) $\sin x = \frac{12}{13};\ x \in \left(0, \frac{1}{2}p\right);$

c) $\text{cotg}\ x = -\frac{3}{4};\ x \in \left(\frac{3}{2}p, 2p\right);$

d) $\text{tg}\ x = \frac{4}{3};\ x \in \left(p, \frac{3}{2}p\right).$

2) Bez použitia tabuliek i kalkulačky určte:

a) $\cos 75^\circ$

b) $\sin 105^\circ$

c) $\cos 15^\circ$

d) $\sin \frac{1}{12}p$

e) $\sin 2x$, ak $\sin x = \frac{2}{3}$

f) $\cos 2x$, ak $\cos x = -0{,}8$

g) $\sin(x + y)$, ak $\sin x = \frac{12}{13}$ a $\sin y = \frac{4}{5}$

3) Upravte:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x + tg^2 x$

b) $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}$

c) $\frac{tgx.\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

d) $\frac{1-\cos 2x + \sin 2x}{1+\cos 2x + \sin 2x}$

6. Trigonometria

6.1. Riešiť pravouhlý trojuholník pomocou goniometrických funkcií ostrého uhla.

1) Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC*, v ktorom dĺžka prepony c = 6 cm a zároveň sin α = 0,6.

2) Z daných prvkov v pravouhlom trojuholníku *ABC* (γ = 90°) vypočítajte zvyšné prvky:
   a) b = 54,5 cm, α = 49°50′
   b) a = 7,5 cm, v_c = 5 cm
   c) S = 17,4 cm^2, a = 5,42 cm
   d) α = 32°20′, v_c = 4,52 cm

3) Daná je kružnica s polomerom 10 cm a jej tetiva, ktorá má dĺžku 12 cm. Vypočítajte veľkosť stredového uhla, ktorý prislúcha tejto tetive.

4) Na vodorovnom teréne sa sadia stromčeky vo vzdialenosti b = 3,5 m od seba. Ako ďaleko od seba musíme kopať jamy pre stromčeky na svahu so sklonom α°, ak chceme zachovať vodorovnú vzdialenosť 3,5 m?

5) V kosoštvorci *ABCD* sú dané:
   a) strana a = 3, uhol a = 67°10′. Vypočítajte jeho uhlopriečky a obsah.
   b) uhlopriečky e = 5, f = 18. Vypočítajte jeho uhly a stranu.

6.2. Riešiť všeobecný trojuholník pomocou sínusovej a kosínusovej vety

1) V trojuholníku *ABC* je b = 8,4 cm, c = 6,9 cm, α = 56°. Vypočítajte veľkosť strany a.

2) Určte dĺžky všetkých strán a veľkosti všetkých uhlov trojuholníka *ABC*, ak je dané: a = 11,6 dm, c = 9 dm, α = 65°30´.

3) Rozhodnite, či trojuholník *ABC*, ktorého strany sú
   a) a = 4 cm, b = 3 cm, c = 6 cm
   b) a = 5 cm, b = 6 cm, c = 7 cm
   c) a = 11cm, b = 14 cm, c = 18 cm
   d) $a = 2x$, $b = \frac{3}{2}x$, $c = 3x$ $(x > 0)$
   e) a = 43 mm, b = 47 mm, c = 50 mm

   je tupouhlý.

4) Určte dĺžku všetkých strán a veľkosti všetkých vnútorných uhlov trojuholníka *ABC*, ak je dané:
   a) a = 51,32 mm, c = 34,76 mm, β = 126°12´
   b) a = 16,9 cm, b = 26 cm, c = 27,3 cm
   c) b = 64 mm, c = 29 mm, α = 47°
   d) a = 11,6 dm, c = 9 dm, α = 65°30′
   e) b = 48,55 cm, γ = 6°30′, α = 69°40′
   f) a = 188,4 mm, β = 56°18′, γ = 95°36′
   g) b = 25 cm, $c = 25.\sqrt{2}$ cm, γ = 45°

h) a = 38 cm, b = 48 cm, α = 37°
i) a = 140 mm, c = 300 mm, α = 71°14′

5) Rozhodnite, pre ktoré $a \in \{2$ cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm$\}$ existuje aspoň jeden trojuholník ABC, taký že $|CB| = a$, α = 30°, b = 8 cm.

6.3. Vyjadriť pomocou goniometrických funkcií výšky trojuholníka, polomer kružnice trojuholníku vpísanej a opísanej i obsah trojuholníka.

1) Vypočítajte dĺžky strán v trojuholníku ABC, v ktorom platí: r (polomer kružnice opísanej) = 10 cm, α = 113°, β = 48°.

2) V trojuholníku ABC je dĺžka strany AB rovná 27 cm a uhol ACB má veľkosť 78°. Vypočítajte s presnosťou na desatiny polomer r kružnice opísanej trojuholníku ABC.

3) Vypočítajte obvod trojuholníka, ktorý je vpísaný do kružnice s polomerom r = 7,5 cm a ktorého vnútorné uhly majú veľkosť 72°30′ a 43°64′.

4) Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak máte k dispozícii tieto údaje:
a) a = 3 cm, b = 4 cm, sin γ = 0,62.
b) a = 25,1 cm, α = 63°, β = 38°
c) $|AB| = \sqrt{12}$, $|AC| = \sqrt{75}$, sin α = 0,75

5) Vypočítajte výšku v_c v trojuholníku určenom tromi základnými prvkami.
a) a = 7 cm, b = 9 cm, γ = 42°30′
b) a = 7,5 cm, b = 10,3 cm, c = 12,8 cm
c) c = 17,4 cm, b = 25,9 cm, β = 62°15′

6) Vypočítajte polomer σ kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ak:
a) b = 2,8 m, α = 45°, γ = 120°
b) a = 5 km, b = 7 km, γ = 58°26′
c) c = 71,6 m, b = 98,3 m, β = 79°15′

6.4. Aplikovať poznatky o goniometrických funkciách a o vzťahoch medzi prvkami trojuholníka v rôznych častiach matematiky, fyziky i pri riešení jednoduchých praktických trigonometrických úloh.

1) V lichobežníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) sa:

$|AB|$ = 73,6 mm, $|BC|$ = 57 mm, $|CD|$ = 60 mm, $|DA|$ = 58,6 mm

Vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.

2) Vo všeobecnom štvoruholníku $ABCD$ (pri obvyklom označení jeho prvkov) sa:

a = 4,7 cm, b = 120°, b = 3,6 cm, g = 88°, c = 8,5 cm

Určte dĺžku zvyšnej strany s presnosťou na mm.

3) Daný je kváder *ABCDEFGH*, ktorého dĺžky hrán sú:

$|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AE| = 3$ cm.

Vypočítajte (s presnosťou na jednotky) obsah rezu tohto kvádra rovinou *EBC*.

4) Vypočítajte povrch a objem telesa, ktoré vznikne rotáciou trojuholníka s prvkami

a) $a = 5$, $b = 7$, $g = 75°$

b) $c = 8{,}6$; $a = 48°25'$, $b = 76°35'$

okolo strany *c*.

5) Dve sily $\boldsymbol{F_1} = 10$ N, $\boldsymbol{F}_2 = 5$ N pôsobia v jednom bode a zvierajú uhol s veľkosťou $\alpha = 52°\ 30'$. Vypočítajte veľkosť výslednice týchto síl a určte aký uhol zviera výslednica so silou $\boldsymbol{F_1}$.

6) Z pozorovateľne 15 m vysokej, ktorá je vzdialená 30 m od brehu, vidíme šírku rieky pod uhlom $\varphi = 15°$. Vypočítajte šírku rieky.

7. Postupnosti

7.1. Charakterizovať na konkrétnych príkladoch obsah pojmu postupnosť a člen postupnosti, konečná a nekonečná postupnosť.

1a) Postupnosť je:

A funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel alebo na množine typu {1, 2, 3, …, n}, kde *n* je prirodzené číslo
B funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel
C funkcia definovaná na množine všetkých celých čísel
D funkcia definovaná na množine všetkých reálnych čísel

b) N-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zapisujeme symbolom a_n. Tento symbol označuje:

A hodnotu prirodzeného čísla *n,* ktorému v danej postupnosti prislúcha reálne číslo *a*
B hodnotu postupnosti prislúchajúcu prirodzenému číslu *n*
C hodnotu postupnosti prislúchajúcu reálnemu číslu *n*
D hodnotu reálneho čísla *n,* ktorému v danej postupnosti prislúcha prirodzené číslo *a*

c) Každá postupnosť je:

A konečná
B nekonečná
C buď konečná alebo nekonečná

2) Koľko rovnakých členov majú postupnosti {4 – n} a $\{4^n - n^4\}$, ak *n* je prirodzené číslo menšie ako päť?

3) Rozhodnite, či všetky členy postupnosti $\left\{\frac{2n+2}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú párne čísla.

4) Určte (2k – 1)-vý člen postupnosti $\{2n-3\}_{n=1}^{\infty}$.

5) Predstavme si párik králikov (samička a samček). Predpokladajme, že v prvom mesiaci života sa nemôžu rozmnožovať a dospejú ako dvojmesačné. Po druhom mesiaci samička každý mesiac vrhne nový párik. Každý párik sa rozmnožuje rovnakým spôsobom. Aký bude počet párov králikov na začiatku každého nasledujúceho mesiaca?

6) Napíšte prvých desať členov nekonečnej postupnosti *k* určenej takto:

$k_n = 0$, ak *n* je prvočíslo
$k_n = 1$, ak *n* nie je prvočíslo

7) Daná je postupnosť $\{n^2 + 2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$. Rozhodnite, ktoré z čísel 223, 289, 361, 1000 sú členmi tejto postupnosti.

7.2. Vysvetliť pomocou konkrétnych príkladov spôsoby určenia postupnosti (vzorcom pre n-tý člen i rekurentne).

1) Napíšte nasledujúce dva členy danej postupnosti a nájdite vyjadrenie pre *n*-tý člen.

a) 5, 10, 15, 20, ... b) 4, 7, 10, 13, ...

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

e) 1, 2, 4, 8, ...

f) $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ...$

g) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, ...$

h) {1, 2, 4, 8, ..., 128, 256}

i) $\left\{27; -9; 3; -1; ...; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}\right\}$

2) Postupnosť je daná rekurentným vzťahom a dvoma konkrétnymi členmi. Vypočítajte jej prvý a siedmy člen, ak $a_{n+2} = a_{n+1} \,.\, a_n$, $a_3 = 10$, $a_4 = 10^2$.

3) Napíšte prvých šesť členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ určenej vzorcom pre n-tý člen:

a) $a_n = 2n - 3$

b) $a_n = -n + 3$

c) $a_n = 2^n - n$

d) $a_n = (-2)^n$

e) $a_n = \frac{n+1}{n}$

f) $a_n = 2^n - 3$

4) Napíšte prvých šesť členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak je postupnosť daná rekurentne:

a) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$

b) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = -a_n + 3$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1}$

d) $a_3 = 5$, $a_{n+1} = a_n - 3$

e) $a_3 = 0$, $a_4 = -3$, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

5) Čísla $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ možno považovať za prvé tri členy postupnosti:

A $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

B $\left\{\frac{1}{(-2)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

C $\left\{\frac{1}{n^2 - n + 2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

D $\left\{\frac{1}{n^2 + n + 2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

7.3.Určiť ľubovoľný člen postupnosti a načrtnúť jej graf.

1) Graficky znázornite prvých šesť členov postupnosti:

a) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1}$

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \,.\, a_n - 1$

2) Graficky znázornite niekoľko členov postupnosti $\left\{ \sin \frac{n.p}{3} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

3) Načrtnite graf postupnosti, ktorej členy sú celé kladné čísla dávajúce po delení 5 zvyšok 2.

4) Načrtnite graf ľubovoľnej nemonotónnej ohraničenej postupnosti.

7.4. Zistiť experimentálne a dôkazom potvrdiť (v jednoduchých prípadoch) hypotézy o monotónnosti a ohraničenosti daných postupností.

1) Daná je postupnosť $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Zistite, či je monotónna a rozhodnite o jej ohraničenosti.

2) Dokážte, že postupnosť $\left\{ n(n+1) \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená.

3) Zistite, ktoré z nasledujúcich postupností sú rastúce a ktoré klesajúce:

a) $\left\{ 3n+2 \right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{ \frac{1-3n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{ 7n-n^2 \right\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{ 1+\frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{ n^2+2n-1 \right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\left\{ \cos n.p \right\}_{n=1}^{\infty}$

4) Zistite, ktoré z nasledujúcich postupností sú ohraničené zhora, ktoré sú ohraničené zdola a ktoré sú ohraničené:

a) $\left\{ 3n+2 \right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{ \frac{1-3n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{ 7n-n^2 \right\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{ 1+\frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{ n^2+2n-1 \right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\left\{ \cos n.p \right\}_{n=1}^{\infty}$

5a) Postupnosť $\left\{ \frac{3n+1}{n+5} \right\}_{n=1}^{\infty}$

A nie je ani rastúca ani klesajúca
B je rastúca a zhora neohraničená
C je klesajúca a zdola ohraničená
D je klesajúca a zdola neohraničená
E je rastúca a zhora ohraničená

b) Postupnosť $\left\{ \frac{n+3}{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

A nie je ani rastúca ani klesajúca
B je rastúca a zhora ohraničená

C je rastúca a zhora neohraničená

D je klesajúca a zdola ohraničená

E je klesajúca a zdola neohraničená

c) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca vtedy a len vtedy, keď

A $\forall\, n \in N;\ a_n > a_{n+1}$

B $\forall\, n \in N;\ a_n < a_{n+1}$

C $\exists\, n \in N;\ a_n > a_{n+1}$

D $\exists\, n \in N;\ a_n < a_{n+1}$

D Ani jedna z možností A - D nie je správna

7.5. Chápať pojem limita postupnosti a intuitívne rozhodnúť, či postupnosť má alebo nemá limitu.

1) Určte také $h \in R$, aby v postupnosti $\left\{2 - n^{-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pre všetky $n > h$ platilo $|a_n - 2| < 10^{-2}$.

A také $h \in R$ neexistuje

B $h = 10^{-2}$

C $h = 1$

D $h = 10$

2) Usúďte (napríklad dosadzovaním veľkých $n \in N$), ktorá z nasledujúcich postupností $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a akú má limitu:

a) $a_n = 2n$

b) $a_n = \dfrac{1}{2n}$

c) $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$

d) $a_n = \dfrac{2n-1}{1-5n}$

e) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n - 4}{n^2 + 2n + 1}$

f) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

g) $a_n = 5$

h) $a_n = 1 + (-1)^n$

i) $a_n = 0{,}999^n$

j) $a_n = 1{,}0001^n$

3) Určte limity nasledujúcich postupností:

a) $a_n = \dfrac{(n-2)^2}{4-n^2}$

b) $b_n = \dfrac{n}{\frac{3}{n} + \frac{n}{3}}$

c) $c_n = 5 + (-1)^n.2$

4) Určte limity nasledujúcich postupností:

a) $\left\{\dfrac{2n+1}{6-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\dfrac{2n}{n^{-2}+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{-1^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

5) Postupnosť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je daná rekurentne: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 .a_n \ \ pre \ všetky \ n \geq 1$

Počínajúc ktorým členom tejto postupnosti platí pre všetky ďalšie členy, že sú menšie ako jedna tisícina?

A počínajúc 29. členom

B počínajúc 30. členom

C počínajúc 31. členom

D počínajúc 32. členom

E počínajúc 33. členom

F taký člen neexistuje

7.6. Rozhodnúť či daná postupnosť je aritmetická, geometrická alebo iná.

1) Ktorá z uvedených postupností je aritmetická?

A $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \ldots$

B $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

C $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots$

D $\frac{1}{17}, -\frac{1}{17}, -\frac{3}{17}, -\frac{5}{17}, \ldots$

E 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, …

2) Čísla $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ sú tri za sebou idúce členy istej postupnosti. Môže byť táto postupnosť aritmetická? A geometrická?

3) Nech $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ľubovoľná aritmetická postupnosť s diferenciou $d \neq 0$. Ktorá z nasledujúcich rovností potom neplatí?

A $a_{30} = \frac{a_{29} + a_{31}}{2}$

B $a_{57} - a_{56} = a_{41} - a_{40}$

C $a_{17} = a_5 + 12d$

D $a_3 + a_{97} = a_1 + a_{100}$

E $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} = 80a_1 + \frac{79.80}{2}d$

4) Uvažujme o takejto postupnosti štvorcov: štvorec $A_2B_2C_2D_2$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_1B_1C_1D_1$, štvorec $A_3B_3C_3D_3$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_2B_2C_2D_2$ atď. Označme o_i obvod štvorca $A_iB_iC_iD_i$. Postupnosť $\{o_i\}_{i=1}^{\infty}$

A je aritmetická s diferenciou $d = \frac{1}{2}$

B je aritmetická s diferenciou $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C je geometrická s kvocientom $q = \frac{1}{2}$

D je geometrická s kvocientom $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E nie je ani aritmetická ani geometrická

5) Uvažujme o takejto postupnosti štvorcov: štvorec $A_2B_2C_2D_2$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_1B_1C_1D_1$, štvorec $A_3B_3C_3D_3$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_2B_2C_2D_2$ atď. Označme P_i obsah štvorca $A_iB_iC_iD_i$. Postupnosť $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$

A je aritmetická s diferenciou $d = \frac{1}{2}$

B je aritmetická s diferenciou $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C je geometrická s kvocientom $q = \frac{1}{2}$

D je geometrická s kvocientom $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E nie je ani aritmetická ani geometrická

7.7.Aktívne ovládať základné vzťahy aritmetickej i geometrickej postupnosti.

1) Napíšte prvé tri členy, desiaty a n-tý člen aritmetickej postupnosti, ak $a_1 = -20$ a diferencia $d = 3$.

2) Nájdite súčet prvých 20-tich členov aritmetickej postupnosti s prvým členom 3 a diferenciou $\frac{1}{2}$.

3) Nájdite nasledujúce súčty:

a) $5 + 9 + 13 + ... + 101$

b) $83 + 80 + 77 + ... + 5$

c) $(-17) + (-12) + (-7) + ... + 33$

d) $1 + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + ... + 9\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 - ... + 64$

f) $1000 + 200 + ... + 0{,}32$

g) $2 - 3 + 4\frac{1}{2} - ... + 22\frac{25}{32}$

Určte aj počet sčítancov.

4) Nájdite súčet $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + ... + 64$ a určte počet jeho sčítancov.

5) Určte súčet prvých k členov nasledujúcich postupností:

a) $\{100; 10; ...\}$, $k = 7$

b) $\{1; -\frac{1}{3}; ...\}$, $k = 6$

c) $\{4; 11; 18; ...\}$, $k = 16$

d) $\{3; 8\frac{1}{2}; 12; ...\}$, $k = 20$

e) $\{19; 13; 7; ...\}$, $k = 10$

f) $\{-9; -1; +7; ...\}$, $k = 8$

g) $\{3; -6; 12; ...\}$, $k = n$

7.8. Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *nekonečný rad* a *súčet nekonečného radu.* V jednoduchých prípadoch určiť postupnosť čiastočných súčtov.

1) Nájdite vyjadrenie nasledujúceho radu vo forme $\sum_{i=1}^{n} a_i$:

a) $5 + 7 + 9 + ... + 27$
b) $5 + 7 + 9 + ... + 1001$
c) $5 + 7 + 9 + ... + 27 + \dots + 1001 + \dots$
d) $6 + 10 + 14 + ... + 50 + ...$
e) $10 + 7 + 4 + ... - 50$
f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + ... + \frac{19}{20}$
g) $\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{9}{10} + ... + \frac{144}{37}$
h) $18 - 6 + 2 - ...$
i) $360 - 180 + 90 - ... + 5\frac{5}{8}$
Pokúste sa nájsť aj súčty jednotlivých radov.

2) Nájdite súčet prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Koľko členov musíme sčítať, aby bol súčet väčší než w? Riešte, ak:
a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; ...\right\}$, $w = 100$ b) $a_1 = 10$, $q = 1{,}5$; $w = 200$

3) Určte súčet prvých k členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{p}{6}\right)$, ak $k \in \{1, 2, 3, 4, 10^2, 9875, 10^6, n\}$.

4) Určte súčet prvých k členov radu $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108} + ...$, ak $k \in \{1, 2, 3, 4, 10^2, 10^6, n\}$.

5) Určte súčet prvých k členov radu $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots$, ak $k \in \{3, 4, 10^2, n\}$. Dokážte, že tento súčet je vždy druhou mocninou prirodzeného čísla.

7.9. Aplikovať poznatky o postupnostiach v praktických úlohách, poznať najmä aplikáciu geometrickej postupnosti v situáciách s pravidelným rastom či poklesom veličín (úrokovanie, pôžičky, splátky, …)

1) Teplota Zeme rastie smerom do jej stredu o l°C na 33 m. Aká je teplota na dne 1015 m hlbokej šachty, ak je v hĺbke 25 m teplota 9°C?

2) Koľko korún stojí vykopanie 11 m hlbokej studne, keď za vykopanie prvého metra zaplatíme 10,- Sk a za vykopanie každého ďalšieho metra dvakrát toľko ako za vykopanie predchádzajúceho metra?

3) Rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu pri 0°C je približne 331 m.s^{-1}. S rastúcou teplotou rýchlosť vzduchu spojite a rovnomerne rastie; ak teplota stúpne o 1°C, rýchlosť sa zvýši o 0,6 m.s^{-1}. Aká je rýchlosť zvuku pri 5°C?

4) Polčas premeny rádia C (RaC) je približne 20 minút. Začiatočná hmotnosť rádia C sú 3 mg. Viete vypočítať aká bude jeho hmotnosť o 2 hodiny? (Polčasom premeny nazývame dobu počas ktorej sa premení polovica začiatočnej hmotnosti rádioaktívnej látky.)

5) V meste Alokš žilo na začiatku roka 1995 23 600 obyvateľov. Asi koľko obyvateľov bude mať toto mesto na začiatku roka 2000, ak sa ročný prárastok odhaduje na 1,8 %?

6) Aký základný vklad treba deponovať v banke, aby po desiatich rokoch zloženého úrokovania (ročne 2,5 %) dosiahla výsledná našetrená suma výšku 100 000 Sk alebo prekročila túto sumu maximálne o 1000 Sk.

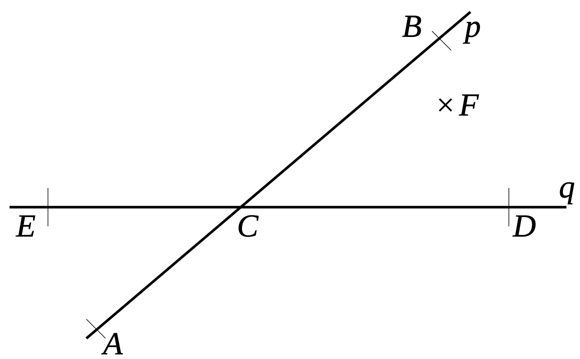
8. Planimetria

8.1.1 Poznať základné geometrické útvary v rovine (*bod, priamka, rovina*) a na konkrétnych príkladoch opísať vzťahy medzi nimi.

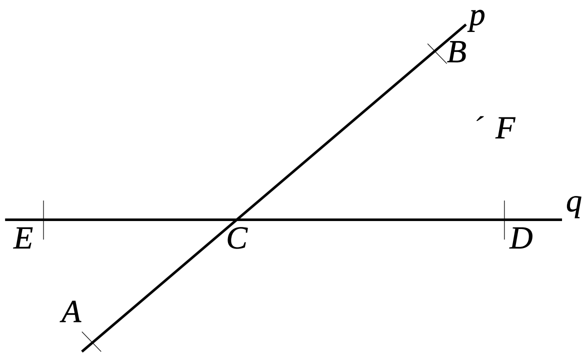
1) Zvoľte šesť rôznych bodov *A, B, C, D, E, F* tak, aby trojice *A, B, C* a *D, E, F* ležali na priamkach. Koľko rôznych priamok je určených danými bodmi?

2) Zvoľte päť rôznych bodov *A, B, C, D, E,* z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Zapíšte všetky priamky, ktoré sú určené týmito bodmi.

3) Vyslovte a zapíšte slovami výroky o vzájomnej polohe útvarov znázornených na obrázku, ktoré sú vyjadrené pomocou symbolov:
   a) $A \in p$
   b) $D \notin p$
   c) $q = \leftrightarrow DE$
   d) $C \in p \cap q$
   e) $D \in \to ABF$
   f) $p \subset \leftrightarrow ABE$
   g) $\to ABD = \to ABF$
   h) $F \in \to qB \cap \to pD$
   i) $\to CA \cup \to CB = p$



4) Zapíšte pomocou vhodných symbolov výroky o vzájomnej polohe útvarov znázornených na obrázku:
   a) polpriamka *CD* leží v polrovine *pF*
   b) polpriamka *EC* neleží v polrovine *ABE*
   c) polrovina *ACD* splýva s polrovinou *BCF*
   d) bod *B* je spoločným bodom polroviny *qF* a polpriamky *CB*



e) bod E je bodom polpriamky opačnej k polpriamke CD
f) bod B leží na priamke p
g) bod E neleží na priamke p
h) bod C patrí do prieniku priamok p, q
i) úsečka CB je prienikom polpriamok CB a BC

5) Daných je šesť bodov A, B, C, D, E, F, ktoré sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka a priamka p, ktorá oddeľuje bod B od bodu C a bod D od bodu E.
   a) Vypíšte tie body, ktoré priamka p oddeľuje od bodu C.
   b) Zapíšte všetky polroviny určené hranicou p a jedným z daných bodov. Ktoré z nich sú totožné ?

8.1.2 Definovať geometrické útvary (*úsečka, uhol, rovinný pás, trojuholník, konvexný n-uholník, kružnica, kruh*) pomocou množinových operácií alebo pomocou charakteristickej vlastnosti.

1) Načrtnite priamku p a na nej tri rôzne body A, B, C v napísanom poradí. Zapíšte:
   a) všetky polpriamky, ktoré sú určené týmito bodmi,
   b) všetky úsečky, ktoré sú určené týmito bodmi,
   c) všetky vzťahy medzi bodmi, polpriamkami, úsečkami na priamke p.
   d) Nájdite dvojice polpriamok, ktoré nemajú spoločný bod.

2) Nech A, B, C, D sú rôzne body priamky v napísanom poradí. Čo je prienik:
   a) polpriamok AB, BA
   b) polpriamok BC, DA
   c) polpriamok BA, BC
   d) polpriamok BA, CD
   e) úsečiek AC, BC
   f) úsečiek AC, CD
   g) úsečiek AD, BC
   h) úsečiek AB, CD
   i) úsečky AC a polpriamky BD?

3) Načrtnite všetky možnosti vzájomnej polohy troch priamok p, q, r v rovine. Ku každej možnosti určte aj:
   a) $p \cap q, p \cap r, q \cap r$
   b) $p \cap q \cap r$

4) Načrtnite všetky možnosti vzájomnej polohy troch polrovín pP, qQ, rR v rovine. Ku každej možnosti určte aj:
   a) →pP ∩ ®qQ, ®pP ∩ ®rR, ®qQ ∩ ®rR
   b) →pP ∩ ®qQ ∩ ®rR

5) V rovine sú dané tri rôzne body, ktoré neležia na jednej priamke. K týmto trom bodom zostrojte štvrtý bod tak, aby tieto štyri body boli vrcholmi:
   a) konvexného štvoruholníka
   b) nekonvexného štvoruholníka

6) Pomenujte a zapíšte symbolicky nasledujúce množiny:
   a) Množina všetkých bodov roviny, ktoré sú vzdialené od daného pevného bodu 8 jednotiek dĺžky.
   b) Množina všetkých bodov roviny, ktoré sú vzdialené od daného pevného bodu najviac 8 jednotiek dĺžky.
   c) Množina všetkých bodov roviny, ktoré sú vzdialené od daného pevného bodu viac ako 8 jednotiek dĺžky.

d) Množina všetkých bodov roviny, ktoré sú vzdialené od daného pevného bodu najmenej 8 jednotiek dĺžky.

8.1.3 Aktívne ovládať pojmy *uhol, veľkosť uhla* (v stupňovej i oblúkovej miere), *orientovaný uhol*

1) Zvoľte tri rôzne body *A, B, C*, ktoré neležia na priamke.
   a) Vyznačte tieto útvary: konvexný uhol *ACB*, vrcholový uhol ku konvexnému uhlu *CBA*, uhol vedľajší ku konvexnému uhlu *ABC* s ramenom *BC*, nekonvexný uhol *ABC*

   b) Opíšte vznik útvarov uvedených v a) pomocou množinových operácií s polrovinami.

2) Veľkosti uhlov v stupňovej miere vyjadrite v oblúkovej miere:
   a) 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 225°, 300°, 330°, 360°
   b) 55°, 175°, 354°, 470°, 517°

3) Veľkosti uhlov v oblúkovej miere vyjadrite v stupňoch (stupňovej miere):
   a) $\frac{1}{4}p, \frac{5}{6}p, \frac{4}{3}p, \frac{7}{2}p, \frac{9}{10}p$
   b) 0,75; 2,4; 5,3; 4,1; 6,6

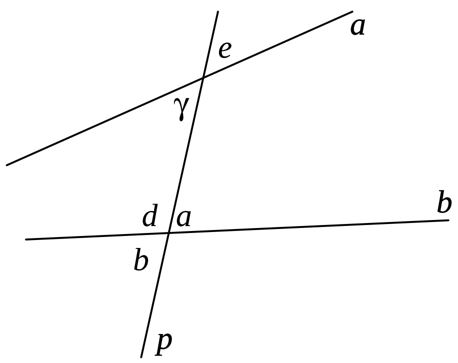
4) Určte veľkosť orientovaného uhla, ktorý na kompase zviera so smerom *V* smer:
   a) *SV*   b) *SSV*   c) *SZZ*

5) K daným uhlom $a = 60°$, $b = 75°$, $g = 15°$ zostrojte graficky uhly:
   a) $a + b + g$ b) $a + b - g$ c) $a - (b - g)$

8.1.4 Rozoznať dvojice uhlov (*styčné, doplnkové, susedné, striedavé*) a tieto poznatky aktívne využívať pri výpočtových úlohách o veľkostiach uhlov

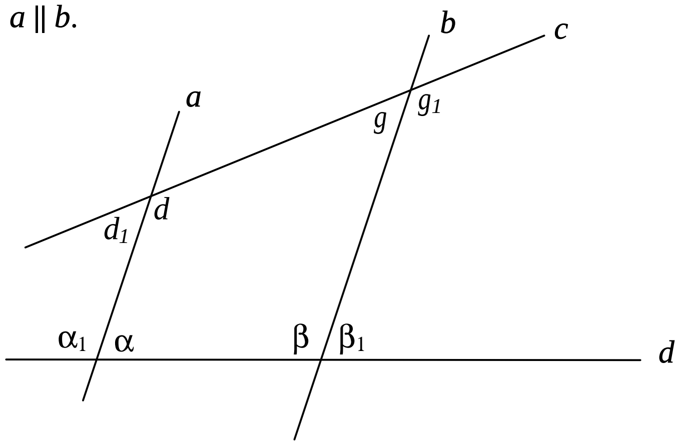
1) Dané sú dve rovnobežné priamky *a, b* a ich priečka *p*. Zostrojte osi jednej dvojice striedavých uhlov a dokážte, že sú rovnobežné.

2) K danému uhlu α znázornenému na obrázku 8.1.2 určte uhol:
   a) vrcholový   b) vedľajší   c) striedavý   d) súhlasný



Obr. 8.1.2

3) Určte veľkosti uhlov β, β_1, δ, δ_1, γ_1 v situácii znázornenej na obrázku 8.1.3, ak $\alpha = 70°$, $\gamma = 40°$ a $a \parallel b$.



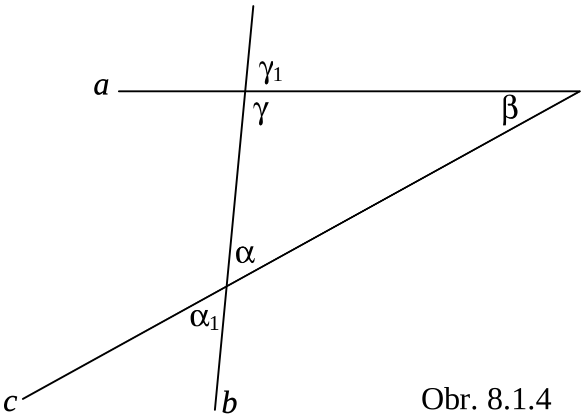
Obr. 8.1.3

4) V situácii znázornenej na obrázku 8.1.4 určte veľkosti uhlov:

a) a) α, γ, ak sa $\alpha_1 = 120°$, $\beta = 30°$

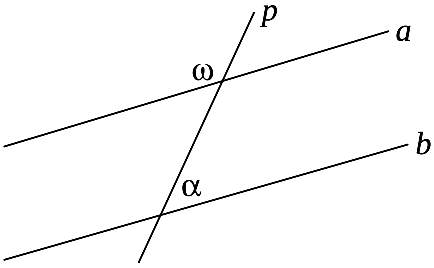
b) b) α_1, β, γ, ak sa $\alpha = 50°$, $\beta = \frac{a}{2}$

c) c) α, β, γ, ak sa $\gamma_1 = 88°$, $\alpha = \beta + 64°$



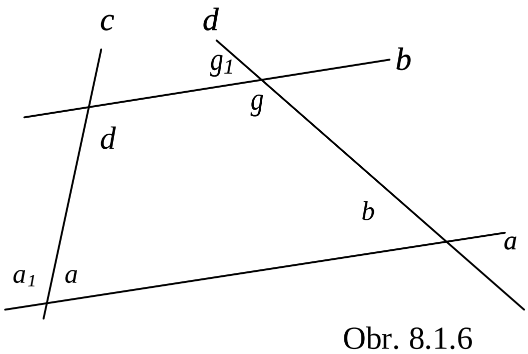
Obr. 8.1.4

5) Určte veľkosť uhla w znázorneného na obrázku 8.1.5, ak $a = 60°$ a $a \parallel b$.



Obr. 8.1.5

6) Určte veľkosti uhlov a_1, g, g_1, d znázornených na obrázku 8.1.6, ak $a = 62°$, $b = 48°$ a $a \parallel b$.



Obr. 8.1.6

8.1.5 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *obvodový a stredový uhol*, sformulovať vetu o ich vzťahu

1) V kružnici *k(S, r)* je daná tetiva *AB*, ktorej dĺžka je menšia ako *2r*.
   a) a) Načrtnite stredový uhol *w* príslušný ku kratšiemu oblúku *AB*.
   b) b) Načrtnite aspoň tri obvodové uhly príslušné k tomuto oblúku.
   c) c) Ak sa *w* = 120°, určte veľkosti vyznačených obvodových uhlov.

2) Určte stredový uhol, ak príslušný obvodový uhol má veľkosť:
   a) 23° b) 120° c) 90°
   d) d) 65°25′ e) 105° 45′

3) Určte obvodový uhol, ak príslušný stredový uhol má veľkosť:
   a) 60° b) 90° c) 180°
   d) 168°20′ e) 256°46′

4) Ako sa zmení stredový uhol, ak príslušný obvodový uhol sa:
   a) zmenší dvakrát b) zväčší o 15° c) zmenší o 32°20′

5) Určte veľkosti uhlov, ktoré na hodinovom ciferníku zvierajú spojnice bodov označené číslami:
   a) 8, 11 a 11, 2 b) 7, 1 a 1, 4 c) 7, 8 a 8, 11

8.1.6 Interpretovať Talesovu vetu ako dôsledok vety o stredovom a obvodovom uhle

1) Zostrojte množinu všetkých bodov, z ktorých je vidieť úsečku *AB* ($|AB|$ = 5 cm) pod uhlom:
   a) 30° b) 45° c) 60° d)90°

2) Vyslovte Talesovu vetu a dokážte jej platnosť pre niekoľko konkrétnych uhlov.

3) Daná je kružnica *k(S, r)* a bod *A*, ktorý leží zvonka nej. Zostrojte dotyčnicu ku kružnici *k*, ktorá prechádza bodom *A*.

4) Nad priemerom *AB* je opísaná polkružnica *k*. Bod *C* je ľubovoľný bod tejto polkružnice rôzny od *A* i *B*. Do trojuholníka *ABC* je vpísaná kružnica so stredom *S*. Akú veľkosť má uhol *ASB*?

8.1.7. Rozlíšiť konvexný a nekonvexný geometrický útvar

1) Dokážte, že
   a) kružnica nie je konvexný útvar,
   b) kruh je konvexný útvar.

2) Uveďte príklady dvojíc nekonvexných útvarov, ktoré majú konvexný prienik, obsahujúci trojuholník.

3) Vypočítajte veľkosti zvyšných uhlov konvexného štvoruholníka, ak $\alpha = 70°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$.

4) Zistite, či existuje konvexný šesťuholník, ktorého všetky vnútorné uhly majú veľkosť 120° a ktorý nie je pravidelný.

5) Rozhodnite, či sú nasledujúce útvary konvexné:
a) úsečka bez krajného bodu
b) úsečka bez jedného vnútorného bodu
c) trojuholník bez jedného vrcholu
d) trojuholník bez dvoch vrcholov
e) konvexný uhol bez vrcholu
f) trojuholník bez stredov strán

8.1.8. Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch priamok

1) Načrtnite všetky možnosti vzájomnej polohy dvoch priamok *p, q* v rovine. Ku každej možnosti určte aj $p \cap q$.

2) Daná je priamka *p* a bod $A \notin p$. Zostrojte priamku *q* tak, aby platilo:
a) $A \in q \wedge p \cap q = \emptyset$
b) $A \in q \wedge p \cap q = \{P\}$
c) $A \in q \wedge p \cap q = p$

3) Body *A, B, C, D, E, F* sú vrcholy pravidelného šesťuholníka. Určte vzájomnú polohu všetkých dvojíc priamok, ktoré sú určené vrcholmi daného šesťuholníka.

4) Určte na koľko častí rozdelí rovinu:
a) päť rovnobežiek
b) *n* rovnobežiek

8.1.9 Klasifikovať vzájomnú polohu priamky a kružnice i vzájomnú polohu dvoch kružníc

1) Načrtnite všetky možné prípady vzájomnej polohy priamky a kružnice.

2) Daná je kružnica $k(S, r = 3cm)$ a bod *A* tak, že $|AS| = 7$ cm. Narysujte dotyčnice ku kružnici *k*, ktoré prechádzajú bodom *A*. Dotykové body označte T_1, T_2. Vypočítajte $|AT_1|$, $|AT_2|$.

3) Daná je kružnica $k(S, 3$ cm$)$ a priamka *p*. Vzdialenosť $|Sp| = 5$ cm. Zostrojte dotyčnice kružnice *k*
a) a) rovnobežné s priamkou *p*
b) b) kolmé na priamku *p*
c) c) ktoré s priamkou *p* zvierajú 60°-vý uhol

4) Dané sú kružnice *k, l.* Zostrojte všetky spoločné dotyčnice týchto kružníc.

5) Zostrojte kružnice k_1, k_2, k_3, ktoré majú polomery $r_1 = 5{,}5$ cm, $r_2 = 2{,}5$ cm, $r_3 = 1{,}5$ cm tak, aby:
a) mali navzájom vonkajší dotyk
b) kružnice k_1, k_2 mali vnútorný a k_2, k_3 vonkajší dotyk

8.1.10 Klasifikovať trojuholníky

1) Klasifikujte trojuholníky: a) podľa dĺžok strán
b) podľa veľkosti vnútorných uhlov

2) Dokážte, že vonkajší uhol trojuholníka sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných vrcholoch.

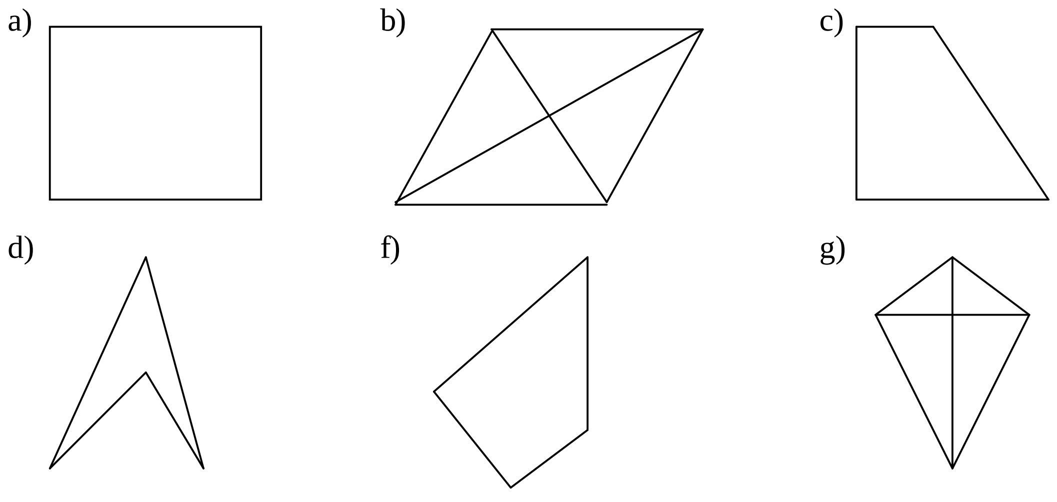
3) Dokážte vetu o zhodnosti uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka použitím vety *sss*. (Spojte vrchol C so stredom S základne AB v trojuholníku ABC, v ktorom $|AC| = |BC|$.)

4) V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AC| = |BC|$) je daná ťažnica CC_1 ($|AC_1| = |C_1B|$). Dokážte, že úsečka CC_1 je výškou trojuholníka a polpriamka CC_1 osou uhla ACB.

5) Použitím vety o vonkajšom uhle trojuholníka dokážte, že ak je v trojuholníku jeden vnútorný uhol tupý alebo pravý, sú druhé dva vnútorné uhly zaručene ostré.

8.1.11 Klasifikovať štvoruholníky

1) Pomenujte štvoruholníky znázornené na obrázku 8.1.



Obr. 8.1

2) Charakterizujte nasledujúce štvoruholníky pomocou uhlov, strán a uhlopriečok:
a) štvorec b) obdĺžnik c) kosoštvorec
d) rovnobežník e) lichobežník

3) Zostrojte rovnobežník $ABCD$ s obvodom 14 cm a polomerom opísanej kružnice 5 cm.

4) Do kružnice $k(S;\ r)$ je vpísaný štvoruholník $ABCD$ tak, že jeho vrcholy delia kružnicu v pomere 2 : 3 : 3 : 4. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka.

5) Vo štvoruholníku $ABCD$ sa uhol a = 40°, uhol b je štyrikrát a uhol g päťkrát väčší ako uhol d. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, štvoruholník potom narysujte. ($|AB|$ = 5 cm, $|BC|$ = 2 cm).

8.1.12 Aktívne ovládať vety o určenosti trojuholníka, vety o stranách a uhloch v trojuholníku, poznať *ťažnice, výšky, stredné priečky, kružnicu vpísanú* a *opísanú trojuholníku*, ich definície a vlastnosti.

1) Rozhodnite, či je možné zostrojiť trojuholník, ktorého strany majú dĺžky:
   a) 1 cm, 2 cm, 3 cm
   b) 4 cm, 5 cm, 6 cm
   c) 5cm, 12 cm, 13 cm
   d) 2,5 cm; 3,8 cm; 6,5 cm

2) V trojuholníku ABC, ktorého strany majú dĺžky a = 5 cm, b = 6 cm, c = 8 cm, zostrojte:
   a) ťažisko
   b) priesečník výšok
   c) kružnicu trojuholníku opísanú
   d) kružnicu trojuholníku vpísanú

3) Ťažnice rozdelia trojuholník na 6 trojuholníkov s rovnakým obsahom. Dokážte!

4) Narysujte ostrouhlý, pravouhlý i tupouhlý trojuholník a zostrojte im opísané kružnice.

5) V konvexnom štvoruholníku $PQRS$ sú body A, B, C, D stredy (postupne) jednotlivých strán. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník. (Návod: AB je stredná priečka trojuholníka PQR.)

8.1.13 Aktívne ovládať pojmy *štvoruholník, rovnobežník (štvorec, kosoštvorec, kosodĺžnik, obdĺžnik), lichobežník,* poznať vlastnosti strán, uhlov a uhlopriečok v štvoruholníku.

1) Zostrojte osi vnútorných uhlov kosodĺžnika. Dokážte, že určujú obdĺžnik.

2) Zostrojte nasledujúce štvoruholníky:
   a) štvorec $ABCD$, ak $|AC|$ = 5 cm
   b) obdĺžnik $ABCD$, ak $|AC|$ = 6 cm, $|AB|$ = 4 cm
   c) kosodĺžnik $ABCD$, ak $|AB|$ = 5 cm, $|BD|$ = 6 cm, $|AC|$ = 3 cm
   d) kosoštvorec $ABCD$, ak $|AB|$ = 4 cm, $|AC|$ = 6 cm
   e) lichobežník $ABCD$, ak $|AB|$ = 6 cm, $|BC|$ = 4 cm, $|CD| = |AD|$ = 3 cm

3) Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú rovnocenné:

A Štvoruholník $ABCD$ je kosoštvorec

B Štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník, ktorému sa dá opísať kružnica.

C Štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník, ktorému sa dá vpísať kružnica.

D Štvoruholník *ABCD* má kolmé uhlopriečky

E Štvoruholník *ABCD* rozdeľujú jeho uhlopriečky na 4 zhodné trojuholníky

F Obsah štvoruholníka *ABCD* sa rovná polovici súčinu uhlopriečok.

4) Ak *ABCD* je ľubovoľný konvexný štvoruholník a ak označíme *P, Q, R, S* (postupne po rade) stredy jeho strán *AB, BC, CD, DA*, tak štvoruholník *PQRS*:

A nikdy nie je rovnobežník

B je určite rovnobežník

C môže, ale nemusí byť rovnobežník

D je určite obdĺžnik alebo štvorec

E je určite rovnobežník, ale nemôže to byť obdĺžnik

5) Uhlopriečky štvoruholníka *ABCD* sa rozpoľujú (majú spoločný stred) a sú na seba kolmé. Z toho vyplýva, že štvoruholník *ABCD* je

A štvorec alebo obdĺžnik, pričom oboje je možné

B určite štvorec

C určite kosoštvorec

D štvorec alebo kosoštvorec, pričom oboje je možné

E kosodĺžnik alebo kosoštvorec, pričom oboje je možné

8.1.14 Aktívne ovládať pojmy *mnohouholník, počet uhlopriečok, pravidelný n-uholník, súčet vnútorných uhlov*

1) Koľko uhlopriečok má n-uholník? Riešte pre $n \in \{5, 6, 10, 12\}$.

2) Vypočítajte súčet vnútorných a súčet vonkajších uhlov n-uholníka.

3) Určte šírku otvoru kľúča na šesťhranné matice, ak poznáme polomer r kružnice "opísanej" matici.

4) Pomocou uhlomera vpíšte do danej kružnice pravidelný n-uholník. Riešte pre:
a) $n = 5$ b) $n = 10$ c) $n = 15$

5) Bez uhlomera zostrojte pravidelný
a) 8-uholník b) 12-uholník
s obvodom 24 cm.

8.1.15 Aktívne ovládať pojmy kružnica, kruh, tetiva, oblúk, odsek, výsek, medzikružie

1) Daná je kružnica $k(S, r)$ a bod M ležiaci vo vnútri kružnice k. Zostrojte tetivu kružnice k, ktorá je bodom M rozpolená.

2) Určte priemer kruhu, ktorého obvod má dĺžku 10 m.

3) Daná je kružnica $k(S, 4\ cm)$ a bod O vo vnútri kružnice k tak, že $|OS| = 1{,}5$ cm. Zostrojte všetky kružnice so stredom O, ktoré sa dotýkajú kružnice k.

4) Vypočítajte obsah podložky pod maticu (tvaru medzikružia) s vonkajším priemerom 2,5 cm a vnútorným priemerom 1 cm.

5) Body A, B, C ležiace na kružnici $k(S, r = 6\ cm)$ delia kružnicu na tri oblúky, ktorých dĺžky sú v pomere 1 : 2 : 3. Vypočítajte:
a) obsahy kruhových výsekov príslušných k daným oblúkom,
b) obvody kruhových výsekov príslušných k daným oblúkom,
c) obsahy kruhových odsekov príslušných k daným oblúkom,
d) obvody kruhových odsekov príslušných k daným oblúkom.

8.1.16 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *odchýlka dvoch priamok, vzdialenosť bodu od priamky* a *vzdialenosť dvoch rovnobežiek*

1) Určte odchýlky osí uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého jeden uhol má veľkosť:
a) 70° b) 50°

2) Určte vzdialenosť strednej priečky a strany rovnostranného trojuholníka *ABC*, ak:
a) $a = 9$ cm b) $a = \sqrt{27}$ cm

3) Určte vzdialenosť ťažiska T a strany b trojuholníka *ABC*, ak:
a) $b = 9$ cm, $S = 27$ cm^2 b) $b = 6$ cm, $S = 27$ cm^2

4) V trojuholníku *ABC* je $\alpha > \beta$. Dokážte, že os uhla γ zviera s výškou v_c uhol $w = \dfrac{a - b}{2}$

8.1.17 Zistiť (vypočítať) obsahy a obvody trojuholníkov, štvoruholníkov, pravidelných *n*-uholníkov, kruhu a jeho častí

1) Vypočítajte obsah trojuholníka *ABC, ak*:
a) $b = 5$ cm, $v_b = 4$ cm b) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 90°$
c) $a = b = c = 4$ cm d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 30°$

2) Určte dĺžku strán obdĺžnika s obvodom 38 cm a obsahom 84 cm^2.

3) Vypočítajte obsah kosoštvorca, ak je daná dĺžka strany $a = 4{,}3$ cm a polomer vpísanej kružnice $r = 1{,}2$ cm.

4) Výška a základne lichobežníka sú v pomere 2 : 3 : 5, jeho obsah je 512 cm^2. Vypočítajte jeho výšku a dĺžky oboch základní.

5) Ak v trojuholníku *ABC* platí, že

$$v_c = \frac{a.b}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos g}}$$

tak môžeme s istotou tvrdiť, že trojuholník *ABC* je:

A rovnostranný

B rovnoramenný s ramenami a, b

C pravouhlý s preponou c

D tupouhlý s tupým uhlom g

E žiadna z možností **A - D** nie je správna, pretože daný vzťah platí v každom trojuholníku

8.1.18 Riešiť aplikované úlohy pomocou trigonometrie

1) Rozhodnite, či trojuholník so stranami 10, 12, 16 má tupý uhol.

2) Urči ostatné strany a uhly v trojuholníku *ABC*, ak:

a) $a - b = 15$, $c = 26$, $g = 71°$

b) $a = 5$, $b = 9$, $r = 6$

c) $r = 10$, $a = 113°$, $b = 48°$

d) $S = 84$, $b + c = 28$, $a = 60°$

3) Aká vysoká je veža, ak vidíme jej pätu z okna umiestneného 15 m nad horizontálnou rovinou v hĺbkovom uhle 12°30′ a jej vrchol vo výškovom uhle 25°20′.

4) Kosoštvorec má obsah 150 cm^2, pomer dĺžok uhlopriečok $e : f = 3 : 4$. Vypočítajte dĺžky uhlopriečok, strany a výšky.

5) Polomer kružnice vpísanej do pravidelného desaťuholníka je 8 cm. Vypočítajte dĺžku jeho strany, polomer kružnice opísanej, obsah a obvod.

8.2.1 Chápať pojem *geometrické zobrazenie*, definovať podobné a zhodné zobrazenie v rovine.

1) Narysujte štvorec *ABCD* s dĺžkou strany 4 cm. Zostrojte stredy jeho strán a postupne ich označte *E, F, G, H* (*E* je stred strany *AB*). Zostrojte stred úsečky *FH* a označte ho *M*. Určte, v ktorom zobrazení sú si priradené body v daných tabuľkách, a tabuľky doplňte.

Vzor	*A*	*E*	*C*		
Obraz	*D*	*G*		*F*	*G*

Vzor	*G*	*D*	*A*		
Obraz	*F*	*B*		*E*	*B*

Vzor	*H*	*A*			*E*
Obraz	*M*	*E*	*G*	*F*	

Vzor	*C*	*B*		*E*	
Obraz	*A*	*D*	*B*		*F*

2) Daný je štvorec *ABCD*. Určte všetky osové súmernosti, v ktorých je tento štvorec samodružným útvarom.

3) Určte samodružné body a samodružné priamky:

a) osovej súmernosti
b) stredovej súmernosti
c) posúvania
d) otáčania
e) rovnoľahlosti

4) Daný je trojuholník *ABC*. Zostrojte obraz trojuholníka *ABC* v rovnoľahlosti *H* s koeficientom *h*. Za stred rovnoľahlosti voľte postupne vnútorný bod trojuholníka *ABC*, bod na obvode trojuholníka *ABC* a vonkajší bod trojuholníka *ABC*.

a) $h = 2$ b) $h = -1{,}5$ c) $h = 0{,}5$

-

5) Načrtnite obraz trojuholníka *ABC* (*A*[–3, –3], *B*[–1, –3], *C*[–3, –1]) a určte súradnice vrcholov obrazu:

a) v súmernosti podľa stredu v bode *O*[0, 0],

b) v súmernosti podľa osi y,

c) v posúvaní, ktoré prevedie bod [0, 0] do bodu [1, 1].

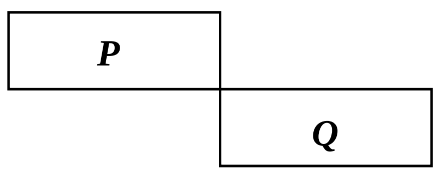
6) Obdĺžnik *Q* môže byť obrazom obdĺžnika *P* vo viacerých zhodných zobrazeniach v rovine. Ktoré zhodné zobrazenie v rovine nemôže zobraziť obdĺžnik *P* ako obdĺžnik *Q*?

A Otáčanie

B Posúvanie

C Osová súmernosť

D Stredová súmernosť

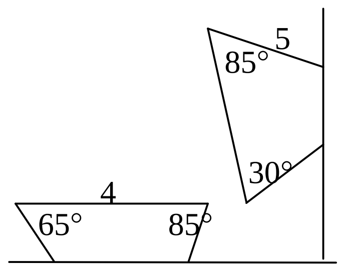


E Posunutie zložené s osovou súmernosťou

8.2.2 Využívať vety o podobnosti a zhodnosti trojuholníkov pri výpočtoch prvkov geometrických útvarov

1) Rozhodnite, či sú (pri vhodnom poradí vrcholov) podobné trojuholníky, ak viete, že:
   a) jeden má dĺžky strán 12 cm, 16 cm, 19 cm, druhý 10 cm, 13 cm, 15 cm
   b) jeden má vnútorné uhly 42° a 84°, druhý 84° a 54°
   c) jeden má strany $\frac{4}{3}$ cm, $\frac{7}{6}$ cm a uhol nimi zovretý má veľkosť 55°, druhý 2 cm; 1,75 cm a uhol nimi zovretý má veľkosť 55°

2) Na obrázku sú časti dvoch trojuholníkov. Jeden má stranu dlhú 4 a veľkosti uhlov k nej priľahlých sú 65° a 85°. O druhom z nich vieme, že oproti uhlu s veľkosťou 30° leží strana s dĺžkou 5. Uhol priľahlý k tejto strane má veľkosť 85°. O týchto dvoch trojuholníkoch môžeme s istotou tvrdiť, že



A sú zhodné

B sú podobné, ale nie sú zhodné

C sú zhodné, ale nie sú podobné

D nie sú podobné

E nemožno rozhodnúť, pokiaľ nevidíme celé trojuholníky

3) Zostrojte výšky v_a, v_b, v_c v ostrouhlom trojuholníku *ABC*. Ich päty označte A_0, B_0, C_0. Určte všetky podobné trojuholníky s vrcholmi A, B, C, A_0, B_0, C_0, ktoré vzniknú konštrukciou.

4) Rozdeľte danú úsečku *AB* bodom *V* na dve časti tak, aby:

a) $|AB| : |BV| = 3 : 5$ b) $|AV| : |BV| = \sqrt{3} : 2$

c) $|AV| : |BV| = 4 : \sqrt{7}$ d) $|AV| : |BV| = \sqrt{5} : \sqrt{8}$

5) Zvislá metrová tyč vrhá tieň 150 cm dlhý. Vypočítajte výšku veže, ktorej tieň je v tom istom čase dlhý 36 m.

6) Z dvoch podobných trojuholníkov má jeden obvod 100 cm, druhý má dĺžky strán postupne o 8, 14 a 18 cm dlhšie ako prvý. Urči dĺžky strán oboch trojuholníkov.

7) Určte mierku mapy, ak je les tvaru trojuholníka s rozmermi 1,6 km, 2,4 km a 2,7 km zakreslený na mape ako trojuholník so stranami dlhými 32 mm, 48 mm a 54 mm.

8) Bežný kancelársky papier má formát *A4*. Keď ho prehneme na polovicu, dostaneme papier formátu *A5*. Rozmery obdĺžnika *A4* sú volené tak, aby obdĺžniky formátov *A4* a *A5* boli podobné. Určte ***d*** - pomer dĺžky ku šírke papiera formátu *A4* a *k* - koeficient podobnosti obdĺžnika formátu *A4* s obdĺžnikom formátu *A5*.

9) Trojuholníky *ABC* a *A´B´C´* sú podobné s pomerom podobnosti *k*. Čo platí o pomere:
   a) ich obvodov? b) ich obsahov?

8.2.3 Sformulovať Euklidove a Pytagorovu vetu

1) Vypočítajte prvky ($a, b, c, c_a, c_b, v_c, \alpha, \beta$) pravouhlého trojuholníka ABC ($|\angle C| = 90°$), ak:
   a) $c = 10$ cm, $c_a = 7$ cm
   b) $a = 5$ cm, $c_a = 4$ cm
   c) $b = 5$ cm, $c = 13$ cm

2) Vypočítajte dĺžky strán pravouhlého trojuholníka ABC ($|\angle C| = 90°$), ak $t_a = 8$ cm, $t_b = 12$ cm.

3) Rozhodnite, či trojuholník, ktorého strany majú dané dĺžky je pravouhlý:
   a) 3 cm, 4 cm, 6 cm
   b) 5 cm, 12 cm, 13 cm
   c) $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$

4) Určte obsah pravouhlého trojuholníka ABC s preponou $|AB| = 10$ cm, ak jeden úsek na prepone má veľkosť 7 cm.

5) Vypočítajte dĺžku tetivy v kružnici s polomerom 15 cm, ak tetiva rozdeľuje priemer na ňu kolmý v pomere 1 : 12.

8.2.4 Vysvetliť pojem *súmernosť rovinných útvarov*

1) Určte počet zhodných zobrazení, v ktorých je pravidelný šesťuholník samodružný útvar. Koľko z týchto zobrazení je osových súmerností, koľko je stredových súmerností a koľko otáčaní? Riešte túto úlohu tiež pre pravidelný n-uholník .

2) Určte všetky stredy a osi súmerností nasledujúcich útvarov:
   a) štvorec
   b) obdĺžnik
   c) kosoštvorec
   d) kosodĺžnik
   e) rovnostranný trojuholník
   f) kružnica
   g) deltoid
   h) rovnoramenný lichobežník
   i) rovnoramenný trojuholník
   j) kruhový odsek
   k) elipsa
   l) parabola
   m) hyperbola
   n) rovnoosová hyperbola

3) Vypíšte všetky tlačené písmená veľkej abecedy, ktoré sú:
   a) a) súmerné podľa osi
   b) súmerné podľa dvoch osí
   c) súmerné podľa stredu

4) Ktorý zo štvoruholníkov "*kosodĺžnik, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, rovnoramenný lichobežník*" má stred súmernosti a nemá os súmernosti?

8.2.5 Určiť stredy rovnoľahlosti dvoch kružníc

1) V rovine je daný bod S a kružnica $k(K, r)$. Zostrojte obraz kružnice k v rovnoľahlosti $H(S, h)$, ak:
   a) $h = 2$
   b) $h = 0{,}5$
   c) $h = -1$
   d) $h = -0{,}5$
   e) $h = -2$
   f) $h = 1$

2) Ukážte, že dve rovnobežné úsečky rôznych dĺžok môžu byť vždy dvojakým spôsobom rovnoľahlé.

3) Zostrojte stredy rovnoľahlosti kružníc $k(K, r)$ a $k_1(K_1, r_1)$, kde r ³ r_1, v nasledujúcich prípadoch:

a) $|KK_1| > r + r_1$ b) $|KK_1| = r + r_1$

c) $|KK_1| < r + r_1$ d) $|KK_1| = 0$

4) Zostrojte stredy rovnoľahlosti kružníc $k(K, r)$ a $k_1(K_1, r)$ v nasledujúcich prípadoch:

a) $|KK_1| > 2r$ b) $|KK_1| = 2r$

c) $|KK_1| < 2r$ d) $|KK_1| = 0$

5) Zostrojte spoločné dotyčnice kružníc $k(K, r)$ a $k_1(K_1, r_1)$, kde r ³ r_1, v nasledujúcich prípadoch:

a) $|KK_1| > r + r_1$ b) $|KK_1| = r + r_1$

c) $|KK_1| < r + r_1$ d) $|KK_1| = 0$

8.3.1 Zostrojiť os úsečky, uhla a pásu, os uhlov dvoch rôznobežiek

1) Daná je úsečka AB. Zostrojte množinu všetkých bodov, ktoré majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť.

2) Daná je úsečka AB. Zostrojte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodmi A,B.

3) Zostrojte kružnicu $k(S, r)$, ak sú dané tri jej rôzne body A, B, C.

4) Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané: $a + b$, c ,a (hodnoty si ľubovoľne zvoľte).

8.3.2 Zostrojiť množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od danej priamky

1) Daná je priamka a. Zostrojte množinu všetkých bodov, ktoré majú od priamky a vzdialenosť $v > 0$.

2) Daná je priamka a. Zostrojte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky a, a majú polomer v.

3) Zostrojte trojuholník ABC (hodnoty si voľte ľubovoľne), ak je dané:
   a) a, v_a, g
   b) v, trojuholník je rovnostranný
   c) a, t_a, v_a

4) Zostrojte kosodĺžnik $ADCD$, ak je dané: $|AB| = a$, v_a, v_b, kde v_a je výška na stranu AB, v_b je výška na stranu CD.

5) V rovine f sú dané priamky a, b, c ($a \parallel b$, $a \cap c = \{P\}$). Zostrojte množiny:
   a) A = $\{X \in f; |Xa| = |Xb|\}$
   b) B = $\{X \in f; |Xa| = |Xc|\}$

8.3.3 Zostrojiť množinu všetkých stredov kružníc s daným polomerom, ktoré sa dotýkajú danej kružnice

1) Daná je kružnica $k(S, r)$. Zostrojte množinu všetkých stredov kružníc, ktoré majú daný polomer w a dotýkajú sa kružnice k.
   a) $w < r$
   b) $w > r$

2) Daný je trojuholník ABC ($a = 6$, $b = 7$, $c = 8$). Zostrojte kružnice so stredom vo vrcholoch trojuholníka ABC, ktoré sa navzájom dotýkajú.

8.3.4 Zostrojiť úsečku s dĺžkou vyjadrenou druhou odmocninou prirodzeného čísla

1) Zostrojte úsečky dĺžky $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$.

2) Zostrojte úsečky dĺžky $3.\sqrt{2}, \frac{7}{3}.\sqrt{3}$.

3) Zostrojte úsečky dĺžky $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, $(1 + \sqrt{3}).\sqrt{5}$

4) Dané sú tri úsečky dĺžky *a, b, c*. Zostrojte úsečku *u* dĺžky $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

8.3.5 Zostrojiť dotyčnicu kružnice v jej bode i prechádzajúcu daným bodom

1) K danej kružnici *k(S, r)* zostrojte dotyčnice, ktoré prechádzajú daným bodom *A*, pre ktorý platí:
   a) $|AS| = r$ b) $|AS| > r$

2) Dané sú rôznobežky *a, b* a body $A \in a$, $B \notin a$.
   a) Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamok *a, b* a ktoré prechádzajú bodom *A*
   b) Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky *a* a prechádzajú bodmi *A, B*

3) Daná je kružnica *k* a priamka *p*. Zostrojte dotyčnicu kružnice *k*, ktorá
   a) je rovnobežná s priamkou *p*
   b) je kolmá na priamku *p*
   c) zviera s priamkou *p* uhol 30°.

4) Dané sú kružnice *k, l*. Zostrojte všetky spoločné dotyčnice týchto dvoch kružníc.

5) Daná je kružnica *k* a priamka *p*. Zostrojte takú kružnicu s polomerom 4 cm, ktorá sa dotýka kružnice *k* aj priamky *p*.

8.3.6.Zostrojiť množinu vrcholov všetkých uhlov s rovnakou veľkosťou, ktorých ramená prechádzajú danými bodmi

1) Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané a, v_a, $a < 2R$ (rozmery si vhodne zvoľte).

2) Narysujte úsečky $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, kde $|\angle ABC| = 120°$. Zostrojte bod *X* tak, aby $|\angle AXB| = 60°$ a $|\angle BXC| = 75°$.

3) Daná je úsečka *AB*. Zostrojte množinu bodov, z ktorých vidieť úsečku *AB* pod uhlom:
   a) 40° b) 90° c) 130°

4) Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané:

a) a = 4 cm, t_a = 3 cm, α = 60°
b) t_a = 6 cm, t_b = 7,5 cm, α = 70°
c) t_a = 6 cm, t_c = 7,5 cm, α = 70°

5) Daný je ostrouhlý trojuholník *ABC*. Zostrojte bod, z ktorého vidieť všetky jeho strany pod rovnakým uhlom.

8.3.7 Aplikovať v konštrukčných úlohách vedomosti o trojuholníku, jeho ťažniciach, výškach, kružnici vpísanej a opísanej

2) Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané:

a) t_a = 4,5 cm, t_b = 6 cm, t_c = 7,5 cm
b) a = 9 cm, v_b = 4,5 cm, t_a = 2,5 cm
c) a = 4 cm, v_b = 3,5cm, t_c = 3 cm
d) $a + b$ = 9 cm, c = 5,7 cm, γ = 75°
e) $a + b$ = 9 cm, α = 35°, β = 75°
g) $a - b$ = 4 cm, c = 5,5 cm, γ = 45°

2) Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané:

a) c = 4 cm, a = 5 cm, v_c = 3 cm
b) b = 4 cm, a = 5 cm, v_c = 3 cm
c) c = 5 cm, v_c = 4 cm, α = 120°
d) b = 5 cm, v_c = 4 cm, α = 45°
e) a = 5 cm, v_c = 4 cm, α = 45°

3) Spomedzi všetkých trojuholníkov so stranami a = 4 cm, b = 6 cm, zostrojte ten, čo má najväčší obsah.

4) Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané (r je polomer vpísanej kružnice, r je polomer opísanej kružnice):

a) α = 50°, β = 100°, ρ = 2 cm
b) α = 78°, c = 8 cm, ρ = 2 cm
c) $|\angle ABC|$ = 36°, $|\angle ACB|$ = 74°, r = 4 cm
d) α = 54°, v_c = 6 cm, ρ = 2 cm
e) $|\angle ABC|$ = 36°, $|\angle ACB|$ = 74°, ρ = 4 cm

8.3.8 Zostrojiť v danom zhodnom zobrazení alebo rovnoľahlosti obraz bodu, priamky, mnohouholníka a kružnice

1) Daný päťuholník otočte okolo zvoleného stredu o uhol +75°.

2) Zostrojte útvar stredovo súmerný s daným trojuholníkom *ABC* (voľte postupne ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý trojuholník) podľa stredu súmernosti *S*, ktorý leží:
a) zvonka trojuholníka *ABC*
b) v ťažisku trojuholníka *ABC*
c) v strede strany *BC*

3) Zostrojte obraz kružnice *k(S, r)* :

a) v osovej súmernosti podľa priamky o (uvažujte o všetkých vzájomných polohách priamky o vzhľadom na kružnicu k)
b) v stredovej súmernosti podľa bodu O (bod O je postupne vonkajším, vnútorným i bodom kružnice k)
c) v posunutí, ktoré je určené vektorom $\rightarrow AB$
d) v otáčaní, ktoré je určené stredom otočenia O a uhlom +60°
e) v rovnoľahlosti, ktorá je určená stredom O a koeficientom h (voľte postupne $h = 2$, $h = -\frac{1}{2}$, $h = 1$, $h = -1$)

4) Zvoľte lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD a zostrojte k nemu rovnoľahlý lichobežník, ak je stredom rovnoľahlosti bod $S \in AC \cap BD$ a koeficient rovnoľahlosti
a) $h = 0{,}5$
b) $h = -0{,}5$

8.3.9 Aplikovať v konštrukčných úlohách vedomosti o zhodných a podobných zobrazeniach

1) Daná je priamka p a dva rôzne body A, B, ktoré neležia na priamke p. Nájdite na priamke p bod C tak, aby súčet úsečiek AC, BC bol menší než súčet úsečiek AX, BX, kde X je ľubovoľný bod priamky p, rôzny od bodu C.
a) body A, B ležia v navzájom opačných polrovinách určených priamkou p
b) body A, B ležia v tej istej polrovine určenej priamkou p

2) Do daného štvorca $ABCD$ vpíšte rovnostranný trojuholník, ktorého jeden vrchol leží na strane AB v danom bode X.

3) Daný je štvorec $ABCD$. Na strane AB zvoľte bod M a zostrojte:
a) štvorec $MNPQ$,
b) obdĺžnik $MXPY$,
c) kosodĺžnik $MEPF$,
ktorého vrcholy ležia na stranách štvorca $ABCD$.

4) Daný je trojuholník ABC. Určte na strane AB bod X, na strane AC bod Y tak, aby platilo $|AY| = |BX|$, XY je rovnobežné s BC.

5) Dané sú tri sústredné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$, $k_3(S, r_3)$, pričom $r_1 > r_2 > r_3$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B, C ležali postupne za sebou na kružniciach k_1, k_2, k_3.

6) Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané (r je polomer kružnice vpísanej, r je polomer kružnice opísanej):
a) $a : b : c = 3 : 4 : 5$, $\rho = 4$ cm
b) $a : b = 4 : 3$, $b = \frac{c}{2}$, $a + b = 9$ cm
c) $b = \frac{2a}{3}$, $a = \frac{3c}{4}$, $a + b + c = 9$ cm
d) $|\angle ABC| = 48°$, $a = 2c$, $r = 4$ cm

8.3.10 Riešiť jednoduché konštrukčné úlohy, zostrojiť trojuholník, rovnobežník, lichobežník a kružnicu použitím množín bodov danej vlastnosti.

1) Zostrojte štvorec, ak je dané (e je uhlopriečka štvorca):

a) $e = 6$ b) $a + e = 8$ c) $e - a = 2$

2) Zostrojte obdĺžnik, ak je dané (e je uhlopriečka obdĺžnika):

a) $a = 5$, $e = 7$ b) $a - b = 3{,}5$; $e = 9$

3) Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$, ak je dané (e je uhlopriečka AC):
a) $a = 7$, $b = 4{,}5$; $v_a = 4$ b) $a = 7$, $e = 10$, $v_a = 4$
c) $a = 7$, $e = 10$, $v_b = 5{,}5$

4) Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak je dané ($a = AB \parallel DC = c$, $e = AC$, $f = BD$):

a) $a = 4$, $d = 2.\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, $b \in \{1, 2, \sqrt{5}, \sqrt{8}, 3\}$
b) $b = 4$, $e = 9$, $f = 7$, $v = 3{,}5$
c) $a = 10$, $c = 5$, $e = 6$, $f = 12$

5) Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka troch navzájom rôznych priamok a, b, c, ak:

a) $a \parallel b \parallel c$ b) $a \parallel c$, $K \in a \cap b$
c) $K \in a \cap b$, $L \in a \cap c$, $M \in c \cap b$

9. Stereometria

9.1.1 Vymenovať základné geometrické útvary v priestore (*bod, priamka, rovina*) a definovať vzťahy medzi nimi.

1) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zistite, či
a) nasledujúce body ležia v jednej rovine: *A, C, K, L,* pričom *K, L* sú stredy hrán *EF, FG*
b) nasledujúce body ležia v jednej rovine: *B, H, P, Q,* pričom *P, Q* sú stredy hrán *AE, CG*
c) body *E, B* a priamka *DH* ležia v jednej rovine.

2) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Určte:
a) koľko priamok je určených jej vrcholmi
b) aspoň 12 rovín určených jej vrcholmi
c) aspoň 5 bodov roviny *ABC*
d) aspoň 10 priamok roviny *BCF*

3) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Určte:
a) aspoň 7 bodov na povrchu kocky, ktoré neležia na priamke *BE*
b) aspoň 5 bodov na povrchu kocky, ktoré neležia v rovine *BEH*

4) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Určte:
a) aspoň 5 úsečiek, ktoré neležia na povrchu tejto kocky
b) aspoň 8 priamok, ktoré neležia v rovine *EFH*

5) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Uvedomte si, že úsečky, polpriamky, priamky i roviny sú množiny bodv a určte pravdivostné hodnoty nasledujúcich výrokov:

a) bod *D* leží v rovine *AEH*
b) úsečka *CG* neleží v rovine *DCH*
c) priamka *AE* je prvkom roviny *ABF*
d) priamka *AE* leží v rovine *ABF*
e) roviny *ABC* a *DCA* sú totožné
f) body *A, C, G, E* ležia v jednej rovine
g) stred úsečky *FH* leží v rovine *DBF*
h) body *B, D, C* neležia v jednej rovine
i) priamka *HD* neleží v rovine *DBF*
j) bod *E* nie je bodom priamky *BD*

9.1.2 Aktívne ovládať základné stereometrické vety

1) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Dvoma rôznymi bodmi prechádza jediná priamka
b) Dvoma bodmi prechádza jediná priamka
c) Dvoma rôznymi bodmi môžu prechádzať dve rôzne priamky

2) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Ak ležia dva rôzne body v rovine, priamka nimi určená nemusí ležať v tejto rovine
b) Ak ležia dva rôzne body v rovine, priamka nimi určená leží tiež v tejto rovine
c) Ak ležia dva rôzne body v rovine, priamka nimi určená môže ležať tiež v tejto rovine

3) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Priamkou a bodom, ktorý na nej neleží sú určené dve rôznobežné roviny
b) Priamkou a bodom je určená jediná rovina
c) Priamkou a bodom, ktorý na nej neleží, je určená jediná rovina

4) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Tromi rôznymi bodmi prechádza jediná rovina
b) Tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke, môžu prechádzať tri rôzne roviny
c) Tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke, prechádza jediná rovina

5) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Dve rôzne priamky, ktoré nemajú spoločný bod, sú mimobežky.
b) Dve rôzne priamky, ktoré nemajú spoločný bod, sú rovnobežky.
c) Dve priamky, ktoré nemajú spoločný bod, sú buď mimobežky alebo rovnobežky.

6) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

a) Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú aj spoločnú priamku, ktorá týmto bodom prechádza. Inak už nemajú spoločný žiaden ďalší bod.
b) Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú aj spoločnú priamku, ktorá týmto bodom prechádza. Inak už nemajú spoločný žiaden ďalší bod.
c) Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú aj spoločnú priamku, ktorá týmto bodom prechádza. Okrem tejto priamky môžu mať aj ďalší spoločný bod.

9.1.3 Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch priamok

1) Daná je kocka *ABCDEEFGH*. Body *U, V* sú stredy hrán *AE, CG*. Dokážte, že priamky *HU* a *BV* sú rovnobežné.

2) Priamky *MN, PQ* sú mimobežné. Určte vzájomnú polohu priamok *MQ, NP*.

3) Daná je kocka *ABCDEFGH*.
   a) Určte vzájomnú polohu priamky *EH* a spojnice stredov hrán *BF* a *CG*.
   b) Určte vzájomnú polohu priamok *PQ* a *RS*, ak body *P, Q, R, S* sú stredy stien *ADHE, ABFE, BCGF, CDHG*.

4) Daná je kocka *ABCDEFGH.* Zistite:
   a) koľko rôznych mimobežných priamok určujú vrcholy tejto kocky
   b) koľko párov rôznobežných priamok určujú vrcholy tejto kocky

5) Body *P, Q, R* sú stredmi hrán *GH, CG, CD* kocky *ABCDEFGH*. Určte aspoň tri priamky, ktoré sú s priamkou *EP*

   a) rovnobežné   b) rôznobežné   c) mimobežné

9.1.4 Klasifikovať vzájomnú polohu priamky a roviny

1) Predĺžte ľubovoľnú hranu kocky *ABCDEFGH* a uveďte tie steny kocky, s ktorými je rovnobežná.

2) Priamka *p* je
   a) rôznobežná   b) rovnobežná
   s rovinou ρ. Priamka *q* je ľubovoľná priamka roviny ρ. Aké vzájomné polohy môžu mať priamky *p, q* ?

3) Daná je kocka *ABCDEFGH.* Vymenujte všetky roviny, ktoré obsahujú bod *H* a ďalšie dva vrcholy kocky, ktoré sú s priamkou *AB*
   a) rovnobežné   b) rôznobežné

4) Vymenujte všetky priamky, ktoré prechádzajú bodom *H* a niektorým ďalším vrcholom kocky *ABCDEFGH* a ktoré sú s rovinou *ABC*
   a) rovnobežné   b) rôznobežné

5) Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:
   a) Priamka *a* je rovnobežná s rovinou α práve vtedy, ak v rovine α existujú aspoň dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s priamkou *a*
   b) Priamka *a* je rovnobežná s rovinou α práve vtedy, ak v rovine α existuje priamka, ktorá je rovnobežná s priamkou *a*
   c) Priamka *a* je rovnobežná s rovinou α práve vtedy, ak v rovine α existuje priamka, ktorá je rôznobežná s priamkou *a*

9.1.5 Klasifikovať vzájomnú polohu dvoch rovín

1) Koľko dvojíc navzájom rovnobežných rovín určujú vrcholy
   a) kocky   b) kvádra   c) rovnobežnostena

2) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Každá trojica rôznych vrcholov určuje rovinu. Určte také dvojice rovín, ktorých prienikom je

a) prázdna množina b) priamka c) rovina

3) Určte pravdivostné hodnoty nasledujúcich výrokov:

a) Pre každé dve roviny α, β platí: Ak prienikom dvoch rôznych rovín α, β je neprázdna množina, tým prienikom je priamka.

b) Pre každé dve roviny α, β platí: Ak rovina α obsahuje dve rôznobežky *a*, *b*, ktorých prienikom s rovinou β je prázdna množina, tak i prienikom rovín α, β je prázdna množina.

c) Pre každý bod *A* a pre každú rovinu α platí: Existuje práve jedna rovina β, ktorá obsahuje bod *A* a je rovnobežná s rovinou α.

4) Vymenujte všetky roviny, ktoré obsahujú bod *H* a ďalšie dva rôzne vrcholy kocky *ABCDEFGH*, ktoré sú s rovinou *ABC*

a) rovnobežné b) rôznobežné

5) Rovina ρ obsahuje dve rôzne rovnobežné priamky, ktorých prienik s rovinou σ je prázdna množina. Sú roviny ρ, σ rovnobežné?

9.1.6 Klasifikovať vzájomnú polohu troch rovín

1) Dané sú dve kocky so spoločnou stenou, *ABCDEFGH* a *ABCDIJKL*. Určte prienik každých dvoch z daných trojíc rovín, potom všetkých troch:

a) *IJK, ABC, EFG* b) *ABC, EFG, BCH*

c) *JKG, ABC, BCH* d) *BCH, JKG, IJK*

e) *IJF, JKG, IJK*

2) Dané sú tri rôzne roviny α, β, γ. Nech α, β sú rôznobežné roviny, ktoré sa pretínajú v priamke *c* a nech priamka *c* pretína rovinu γ v bode *P*. Dokážte, že v tomto prípade každé dve z rovín α, β, γ sa pretínajú v priamke, ktorá prechádza bodom *P*.

3) Dokážte, že pre každé tri rôzne roviny α, β, γ platí: Ak rovina γ pretína dve rovnobežné roviny α, β, tak tieto priesečnice sú navzájom rovnobežné.

4) Určte na rovnobežnostene *ABCDEFGH* trojice rovín, z ktorých dve sú rovnobežné a tretia je s nimi rôznobežná. Určte aj trojicu rovín, z ktorých každé dve sú rôznobežné a priesečnice každých dvoch z uvažovaných rovín sú

a) rôznobežné

c) splývajúce

5) Body *K, L, M* sú postupne stredy hrán *AE, BF, CG* kocky *ABCDEFGH*. Určte vzájomnú polohu, prípadne určte aj priesečnice rovín:

a) *ABC, EFG, KLM* b)

c) *HEB, CFG, ABC* d)

e) HMB, HDC, ABC

9.1.7 Využiť základné vety stereometrie a poznatky o vzájomnej polohe priamok a rovín pri konštrukcii priesečnice dvoch rovín, priesečníka priamky s rovinou, pri konštrukcii rovinného rezu hranola a ihlana i pri konštrukcii priesečníka priamky a hranola

1) Zostrojte rez kvádra *ABCDEFFGH* rovinou, ktorá prechádza priamkou *BC* a je rovnobežná s priamkou
   a) *CH* b) *CP*
   c) *CQ*.
   Body *P,Q* sú postupne vnútorné body hrán *AD* a *EH*.

2) Daná je kocka *ABCDEFGH* . Zostrojte priesečnicu rovín
   a) *ACG, AFH*
   b) *ACF, BEG*
   c) *BCG, AEO*, bod *O* je stredom steny *BCGF*
   d) *ABM, CDM*, bod *P* je stredom hrany *FG*
   e) *ACE, BHP*, od *P* je stredom hrany *FG*.

3) Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*. Body *M, N* sú po rade stredy hrán *BV* a *CV*. Zostrojte priesečnicu rovín:
   a) *ACV, BDN* b) *ABN, CDM*

4) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zostrojte
   a) a) priesečníky priamok *AR, EG* a *EC* s rovinou *BDH,*
   b) b) priesečníky priamok *FC, FD* a *CQ* s rovinou *BHP*, body *P, Q* sú po rade stredy hrán *AE* a *EH.*

5) Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, bod *S* je stredom jeho podstavy. Bod *M* leží na polpriamke *BA*, $|BM| = 1{,}5.|AB|$, bod *N* je stred úsečky *SV* a bod *P* leží na úsečke *OV*, kde bod *O* je stred úsečky *DS*. Zostrojte prienik priamky
   a) *MN* b) *MP*
   s ihlanom.

6) Ktorý z útvarov *„rovnostranný trojuholník, obdĺžnik, konvexný päťuholník, pravidelný šesťuholník, konvexný sedemuholník“* nemôže vzniknúť ako rez kocky rovinou?

9.2.1 Definovať kolmosť priamok a rovín. Rozhodnúť o kolmosti priamok a rovín použitím kritérií o kolmosti

1) Vrcholom *E* kocky *ABCDEFGH* veďte:
   a) priamku kolmú na rovinu *AFH,*
   b) rovinu kolmú na priamku *DF*.

2) Body *K, L, M, N* sú (postupne) stredy hrán *EH, CD, AE, CG* kocky *ABCDEFGH*. Overte kolmosť priamok a rovín:

a) *HM, EF* b) *MN, BH* c) *AL, BK*
d) *FH, ACG* e) *LM, ACH* f) *AL, BFK*
g) *BCE , DGH* h) *ACK, BDH* i) *ALK, BDH*

3) Bod *M* je stred hrany *CV* pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV*. Overte kolmosť priamok a rovín:

a) *AC, BV* b) *BM, CD* c) *AD, CDV*
d) *AM, BDV*

4) Podstavou ihlana *ABCDV* je rovnobežník *ABCD* so stredom *S*. Bočné hrany ihlana majú rovnakú dĺžku. Dokážte, že priamka *VS* je kolmá na rovinu podstavy.

5) Body *M, N* sú stredmi hrán *CD, AB* pravidelného štvorstena *ABCD*. Dokážte, že

a) $AMB \perp CD$ b) $MN \perp AB$ a $MN \perp CD$ c) $AB \perp CD$

9.2.2 Definovať a na konkrétnych pojmoch demonštrovať obsah pojmov *odchýlka dvoch priamok, odchýlka priamky a roviny, odchýlka dvoch rovín*. Určiť (konštrukčne aj výpočtom) a znázorniť v jednoduchých prípadoch odchýlky priamok a rovín.

1) Daný je kváder *ABCDEFGH* ($|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AE| = 7$ cm). Určte odchýlku priamok**:**

a) *AB, GH* b) *BF, GH* c) *AB, EG*
d) *AB, CG* e) *AE, BH* f) *AH, CF*
g) *AH, CH*

2) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Určte odchýlku rovín:

a) *ABC, BDH* b) *ABE, ABH* c) *ABC, BEG*

3) Body *M, N, L* sú (postupne) stredy hrán *BC, CD, CG* kocky *ABCDEFGH*, bod *P* je bodom hrany *BC*, $|BP| : |PC| = 1 : 4$. Určte odchýlku roviny *ABC* a rovín:

a) *MNG* b) *BNL*
Úlohu riešte výpočtom aj konštrukčne.

4) Výška pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV* sa rovná dĺžke podstavných hrán. Vypočítajte odchýlku rovín dvoch

a) protiľahlých stien b) susedných stien

5) Bod *M* je stred hrany *VC* pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV*, v ktorom je $AM \perp CV$.

a) Vypočítajte uhol priamok *CV, AB*.

b) Graficky určte uhol priamok *BM, AC*

9.2.3 Definovať a na konkrétnych príkladoch demonštrovať obsah pojmov *vzdialenosť bodu od priamky, vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín.* Určiť (konštrukčne aj výpočtom) a v jednoduchých prípadoch aj znázorniť tieto vzdialenosti.

1) Daná je kocka *ABCDEFGH*, $|AB| = 6$ cm. Vypočítajte $|Ap|$, ak p je priamka

a) *DH* b) *FG*

c) *FH* d) *BM*

kde *M* je stred hrany *GH*.

2) Hranol *ABCDEFGH* má rozmery $|AB| = |AD| = a$, $|AE| = c$. Určte vzdialenosť bodu A od roviny BDE.

3) Vypočítajte vzdialenosť vrcholu *A* pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV* od priamky *VC,* ak $|AB| = a$, $|AV| = b$.

4) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Vypočítajte vzdialenosť rovín *ACH* a *BGE*, ak telesová uhlopriečka kocky má veľkosť *u*.

5) Daná je kocka *ABCDEFGH*. Vyjadrite pomocou uhlopriečky $|FD| = u$ vzdialenosť bodu *F* od roviny *ABG*.

9.2.4 Zostrojiť skutočnú veľkosť rovinného rezu kolmého hranola a pravidelného ihlana

1) Daná je kocka *ABCDEFGH*, ktorá má dĺžku hrany 5 cm. Body *P, Q* sú stredy jej hrán *BC*,

9.3.1 Zobraziť jednoduché telesá vo voľnom rovnobežnom premietaní

1) Zobrazte vo voľnom rovnobežnom premietaní:

a) kocku s hranou $a = 6$ cm

b) kváder s hranami $a = 5$ cm , $b = 4$ cm, $c = 8$ cm

c) pravidelný trojboký hranol s hranou podstavy $a = 3$ cm a výškou $v = 6$ cm

d) pravidelný šesťboký hranol s hranou podstavy $a = 4$ cm a výškou $v = 5$ cm

e) pravidelný štvorboký ihlan s hranou podstavy $a = 6$ cm a telesovou výškou $v = 6$ cm

f) pravidelný štvorboký ihlan s hranou podstavy $a = 4$ cm a bočnou hranou $b = 6$ cm

g) pravidelný štvorsten s hranou $a = 6$ cm

h) pravidelný štvorboký zrezaný ihlan s hranami podstáv $a = 6$ cm, $b = 4$ cm a výškou $v = 5$ cm

i) pravidelný osemsten s hranou $a = 6$ cm

2) Zobrazte vo voľnom rovnobežnom premietaní:

a) rotačný valec s polomerom podstavy $r = 6$ cm a telesovou výškou $v = 6$ cm

b) rotačný kužeľ s polomerom podstavy $r = 4$ cm a telesovou výškou $v = 6$ cm

c) rotačný kužeľ s polomerom podstavy $r = 6$ cm a bočnou hranou $b = 10$ cm

d) zrezaný rotačný kužeľ s polomermi podstáv $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm a výškou $v = 5$ cm

3) Do kocky *ABCDEFGH* vpíšte teleso, ktorého vrcholy sú stredy stien danej kocky.

4) Do pravidelného štvorstena *ABCD* vpíšte teleso tak, že jeho vrcholy sú ťažiská stien daného štvorstena.

5) Zobrazte vo vhodnej mierke glóbus s polomerom $r = 30$ cm a znázornite póly, ak sa rovník zobrazí
a) ako úsečka b) ako elipsa c) ako kružnica

9.3.2 Charakterizovať základné mnohosteny a rotačné telesá (*kocka, kváder, hranol, ihlan, zrezaný ihlan, rotačný valec, kužeľ, zrezaný kužeľ, guľa, guľová plocha* a jej časti – *odsek, výkrojok, vrstva, vrchlík, pás)*

1) Určte počet, dĺžku a vlastnosti telesových uhlopriečok
a) v kocke s hranou dĺžky a
b) v kvádri s rozmermi a, b, c
c) v pravidelnom osemstene

2) Vypočítajte Eulerovu charakteristiku telesa T, čiže číslo

$$e(T) = v(T) - h(T) + s(T)$$

kde $v(T)$ je počet vrcholov telesa, $h(T)$ počet hrán a $s(T)$ je počet stien, pre
a) kocku (hexaéder)
b) pravidelný trojboký ihlan (tetraéder)
c) pravidelný osemsten (oktaéder)
d) pravidelný dvanásťsten (dodekaéder, každá jeho stena je pravidelný päťuholník)
e) pravidelný dvadsaťsten (ikosaéder, každá jeho stena je rovnostranný trojuholník)

3) Ako sa nazýva teleso, ktoré vznikne
a) otáčaním (rotáciou) obdĺžnika okolo jednej jeho strany
b) otáčaním (rotáciou) pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny
c) otáčaním (rotáciou) kružnice okolo jej ľubovoľného priemeru
d) otáčaním (rotáciou) kruhu okolo priamky prechádzajúcej jeho stredom
e) otáčaním (rotáciou) pravouhlého lichobežníka okolo kratšieho ramena

4) Ako sa nazýva prienik gule
a) s polpriestorom, ktorého hraničná rovina obsahuje aspoň jeden vnútorný bod gule
b) s vrstvou, ktorej obidve rovnobežné hraničné roviny obsahujú vnútorné body gule
c) s rotačným kužeľom, ktorého hlavný vrchol je stred gule a ktorého podstava nepretína guľu

5) Ako sa nazýva prienik guľovej plochy
a) s polpriestorom, ktorého hraničná rovina obsahuje aspoň dva rôzne body guľovej plochy
b) s vrstvou, ktorej obidve rovnobežné hraničné roviny obsahujú aspoň dva rôzne body guľovej plochy

9.3.3 Zhotoviť siete a modely kocky, kvádra, pravidelného hranola a ihlana, rotačného valca a kužeľa

1) Sieť kocky sa skladá zo šiestich zhodných štvorcov. Usporiadajte 6 zhodných štvorcov tak, aby
   a) tvorili sieť kocky (prehnutím hrán sa dá zložiť kocka)
   b) netvorili sieť kocky

2) Zostrojte sieť
   a) pravidelného trojbokého ihlana (štvorstena, tetraédra)
   b) pravidelného osemstena (oktoédra)

3) Zostrojte sieť
   a) rotačného valca s polomerom podstavy r a výškou v
   b) rotačného kužeľa s polomerom podstavy r a výškou v

   Poznámka: Uvedomte si, že dĺžku kružnice vieme zostrojiť len približne. Ako?

4) Zostrojte sieť pravidelného zrezaného šesťbokého ihlana s hranami podstáv a_1, a_2 a výškou v.

5) Zostrojte sieť zrezaného rotačného kužeľa s polomermi podstáv r_1, r_2 a výškou v.

Poznámka: Uvedomte si, že dĺžku kružnice vieme zostrojiť len približne. Ako?

6) Z kocky *ABCDEFGH* odtneme roh pri vrchole *A* rovinou *UVW* (*U* je stred *AB*, *V* je stred *AD*, *W* je stred *AE*). Obdobne odtneme každý roh kocky. Novovzniknutý mnohosten, akýsi okyptená kocka, sa volá kubooktaéder – patrí medzi tzv. polopravidelné čiže archimedovské telesá. Zostrojte sieť kubooktaédra.

7) Z kocky *ABCDEFGH* odtneme každý roh tak, aby sme dostali „obsekanú kocku“, ktorej steny sú buď rovnostranné trojuholníky alebo pravidelné osemuholníky. Toto teleso patrí medzi tzv. polopravidelné čiže archimedovské telesá. Zostrojte sieť tejto „obsekanej kocky“.

9.3.4 Vypočítať objem a povrch kocky, kvádra, hranola, ihlana, rotačného valca a kužeľa, zrezaného ihlana a kužeľa, gule a jej častí

1) Guľa a kocka majú rovnaký povrch. Určte pomer ich objemov.

2) Guľa s polomerom 10 cm je osvetlená z bodu, ktorý je od stredu vzdialený 30 cm. Aká časť povrchu gule je v tieni ?

3) Rozmery kvádra *ABCDEFGH* sú v pomere 7 : 4 : 3, jeho uhlopriečka *BG* je 20. Určte objem tohto kvádra.

4) Ak predĺžime hranu kocky o 5 cm, zväčší sa jej objem o 485 cm^3. Určte povrch pôvodnej i zväčšenej kocky.

5) Dutá kovová guľa má vonkajší priemer d = 40 cm. Určte jej hrúbku, ak má hmotnosť 25 kg. (Hustota kovu $\rho = 8{,}45\ g/cm^3$.)

6) Vypočítajte rozlohu pevniny Zeme – tvorí ju asi 30% všetkého povrchu.

7) Vypočítajte hmotnosť Zeme, ak jej hustota je 5,52 g/cm^3.

8) Koľko percent zemského povrchu leží v pásme

a) tropickom,

b) miernom,

c) arktickom?

Hranicu medzi pásmami tvoria rovnobežky 23°27′ (obratníky) a 66°33′ (polárne kruhy).

9) Tabaková firma NEFAJČI ozdobila svoj stánok na veľtrhu modelom cigarety v tvare valca, ktorého rozmery boli 20-násobkami rozmerov bežnej cigarety. Bežná cigareta obsahuje 0,8 mg nikotínu. Koľko nikotínu by obsahovala "obria" cigareta, keby bola naplnená tabakom?

10. Analytická geometria

10.1.1 Vysvetliť, opísať a na konkrétnom príklade demonštrovať zavedenie súradnicovej sústavy na priamke, v rovine a priestore.

1) Na priamke p určte body, ktorých súradnice vyhovujú rovnici
   a) $|1 - x| = 2$
   b) $|2 + x| = 2$

2) Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC. Dané sú body $A[1, 1]$, $B[5, 1]$. Určte súradnice bodu C výpočtom i meraním.

3) Vo voľnom rovnobežnom premietaní zakreslite sústavu súradníc O,x,y,z. Do nej zakreslite kváder $ABCDEFGH$ ($A[-1, 3, 1]$, $B[4, 3, 1]$, $C[?, -2, 1]$ a $E[?, ?, 5]$). Určte súradnice všetkých vrcholov kvádra.

4) V karteziánskej sústave súradníc O,x,y,z zakreslite pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ ($A[0, 4, 0]$, $B[4, 4, 0]$, $D[0, 0, 0]$, $v = 5$). Zapíšte súradnice hlavného vrcholu V. Určte súradnice vrcholu ihlana, ktorý je obrazom daného ihlana v súmernosti podľa roviny xz.

10.1.2 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *vektor* a *umiestnenie vektora*

1) Zobrazte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a jeho stred označte S. Pomocou bodov A, B, C, D, E, F, S zapíšte všetky možné umiestnenia vektorov:
   a) $\vec{u} = \overrightarrow{SC}$ $\qquad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

2) Daný je rovnobežník $ABCD$ a jeho stredná priečka KL (KL je rovnobežná s AB, $K \in AD$, $L \in BC$). Dokážte, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DC}$ sú umiestnením toho istého vektora.

10.1.3 Interpretovať geometricky *súčet* a *rozdiel vektorov, súčin reálneho čísla a vektora, lineárnu kombináciu vektorov*

1) Narysujte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stredom S. Zvoľte
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$
   Pomocou vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ zapíšte vektory $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE}$.

2) Daný je štvorsten $ABCD$ a T_1, T_2 sú postupne ťažiská jeho stien ABC, CBD. Vyjadrite vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ pomocou vektorov $\vec{u} = \overrightarrow{CA}, \vec{v} = \overrightarrow{CB}, \vec{w} = \overrightarrow{CD}$.

3) Daná je kocka $ABCDEFGH$ a $\vec{u} = \overrightarrow{DA}, \vec{z} = \overrightarrow{DH}, \vec{m} = \overrightarrow{DC}, \vec{s} = \overrightarrow{DF}$. Nájdite na kocke, pomocou bodov A, B, C, D, E, F, G, H nasledujúce vektory:
   a) $\vec{z} - \vec{m}$ $\qquad$ b) $\vec{s} - \vec{z}$
   c) $\vec{m} + \vec{z} - \vec{s}$ $\qquad$ d) $\vec{u} + \vec{m} + \vec{z}$
   e) $\vec{u} - \vec{z} + \vec{m}$

4) Daný je kváder $ABCDEFGH$. Určte súčet vektorov $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HG}$.

5) Daná je kocka $ABCDEFGH$. Nech S je stred jej steny $ABHE$. Vyjadrite vektor $\overrightarrow{CS}$ pomocou vektorov $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$, ak $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{AD}, \vec{t}=\overrightarrow{AE}$.

10.1.4 Vypočítať súradnice vektora určeného dvojicou bodov

1) V rovine sú dané body A, B. Vypočítajte súradnice vektora $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, ak je dané:
   a) $A[3, 2]$, $B[-2, 4]$
   b) $A[-1, -6]$, $B[2, -5]$
   c) A $[3/2, -5/6]$, $B[-1/2, -1/3]$
   d) $A[-2, -3, -2]$, $B[1, -2, -4]$
   e) $A[4/5, -5/6, -3/8]$, $B[9/10, -2/3, -1/6]$

2) Zistite, či orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umiestnením vektora $\vec{u}$
   a) $A[-8, -2]$, $B[-3, 1]$, $\vec{u}(5, -3)$
   b) $A[-6, 5]$, $B[-1, 2]$, $\vec{u}(5, -3)$
   c) $A[-3, -2, -2]$, $B[0, -1, 2]$, $\vec{u}(3, 1, -4)$
   d) $A[-4, -1, 2]$, $B[-1, 0, -2]$, $\vec{u}(3, 1, -4)$

3) Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umiestnením vektora $\vec{u}$. Určte súradnice koncového bodu B, ak platí:
   a) $A[-7, -4]$, $\vec{u}(-3, -5)$
   b) $A[1/2, -1/3, 1/4]$, $\vec{u}(3/2, 2/3, -3/4)$

4) Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umiestnením vektora $\vec{u}$. Určte súradnice začiatočného bodu A, ak je dané:
   a) $B[-7, 9]$, $\vec{u}(3, -4)$
   b) $B[5, -2, 1]$, $\vec{u}(7, -3, -1)$
   c) $B[2/5, 9/10, -3/2]$, $\vec{u}(0{,}4; -1{,}1; -1)$

10.1.5 Vypočítať súradnice súčtu a rozdielu vektorov, súčinu vektora a reálneho čísla, lineárnej kombinácie vektorov

1) Vypočítajte súčty a rozdiely vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ ak je dané
   a) $\vec{u}(-1/2, 3/5)$, $\vec{v}(-3/2, 7/10)$
   b) $\vec{u}(2/3, -1, -3/2)$, $\vec{v}(1/3, 1/2, 3/4)$

2) Určte čísla *a, b* tak, aby platilo
a) 3(1 + a) + 2(1, 6b) = (8, 3)
b) 2 (–2, –2) – b(–4, 1) = (0, –3)
c) (3 + a).(3, 1, –2) – 2(1, 1 + b, 1) = (13, –1, –12)

3) Zistite, či sú vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ rovnobežné
a) $\vec{u}(1, 3)$, $\vec{v}(3, 1)$
b) $\vec{u}(1/2, 3/2)$, $\vec{v}(-0{,}4; -1; 2)$
c) $\vec{u}(1, 2, -3)$, $\vec{v}(-1, 2, 3)$
d) $\vec{u}(1, 1/2, -2)$, $\vec{v}(-2/3, -1/3, 4/3)$

4) Dané sú body *K*[3, 2, –4], *L*[3, 6, –5], *M*[–4, –1, 0]. Vypočítajte súradnice bodu *N*, ak platí:
$L - K = \vec{u}$, $\overrightarrow{NM} = -2.\vec{u}$.

5) Pre ktoré hodnoty parametrov $a, b \in R$ ležia body *A*[5; –2; *a*], *B*[1; *b*; 0], *C*[–3; 0; 1] na jednej priamke?

10.1.6 Určiť veľkosť vektora

1) Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, ak
a) *A*[4, 2], *B*[-2, 5]
b) $A[-3\sqrt{5}, -4]$, $B[\sqrt{5}, -3]$
c) $A[2\sqrt{2}, 1]$, $B[2, -4\sqrt{2}]$

2) Dve sily sú určené orientovanými úsečkami $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$, pričom *O*[0, 0], *A*[0, -6], *B*[5, -6].
Vypočítajte číselnú hodnotu veľkosti:
a) súčtu týchto síl
b) rozdielu týchto síl

3) Určte vektor $\vec{v}$ tak, aby mal danú veľkosť:
a) $\vec{v}(-2, v_2)$, $|\vec{v}| = 3\sqrt{13}$
b) $\vec{v}(1, v_2, v_3)$, $|\vec{v}| = \sqrt{116}$

4) Určte veľkosť vektorov $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, ak
a) *A*[0, 1], *B*[6, 3], *C*[4,5]
b) *A*[1, 2, 3], *B*[3, 3, 6], *C*[0, 1, 2]

5) Dané sú vrcholy trojuholníka *ABC*. Určte jeho obvod.
a) $A[1, 0]$, $B[2, 0]$, $C[2, \sqrt{3}]$
b) *A*[2, –1, 3], *B*[1, 1, 1], *C*[0, 0, 5]

c) $A[-2, 2]$, $B[-1, -3]$, $C[4, 0]$
d) $A[2, -1, 3]$, $B[2, 0, 1]$, $C[-3, 1, 5]$

10.1.7 Definovať pojem skalárny súčin, určiť skalárny súčin

1) Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak

a) $\vec{u}(2, 1)$, $\vec{v}(1, 3)$ b) $\vec{u}(-1, 2, 1)$, $\vec{v}(4, 1, 2)$
c) $\vec{u}(2, -1)$, $\vec{v}(3, 6)$ d) $\vec{u}(2, 1, 4)$, $\vec{v}(1, -3, -1)$
e) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-6, 2)$ f) $\vec{u}(2, 1, 4)$, $\vec{v}(4, 2, 8)$

2) Určte chýbajúcu súradnicu vektora $\vec{u}$ tak, aby $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

a) $\vec{u}(2, u_2)$, $\vec{v}(1, 2)$ b) $\vec{u}(2, u_2, -1)$, $\vec{v}(1, -5, -3)$

3) Dané sú body A, B. Nájdite bod M na osi x tak, aby $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

a) $A[0, 1]$, $B[5, 6]$ b) $A[0, 1, 3]$, $B[-5, 3, -3]$

4) Určte vektor $\vec{w}$ tak, aby $\vec{u}\,.\,\vec{w} = \vec{v}\,.\,\vec{w} = 0$

a) $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(3, 2, -2)$
b) $\vec{u}(-4, -6, 0)$, $\vec{v}(2, -7, 0)$
c) $\vec{u}(1, -2, 3)$, $\vec{v}(-2, 4, -6)$

5) Dané sú body $A[3, 2, 1]$, $B[1, -3, 0]$, $C[0, 2, 5]$. Určte skalárny súčin $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

10.1.8 Určiť odchýlku dvoch vektorov

1) Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak:

a) $A[0, 1]$, B $[-1, 2]$, $C[1, 3]$
b) b) $A[1, 1, 1]$, $B[-1, 0, 2]$, $C[3,1,2]$

2) Vypočítajte odchýlku priamky AB od osí $x, y, z,$ ak $A[-5, -3, 8]$, $B[7, 6, -12]$.

10.1.9 Určiť vektor rovnobežný s daným vektorom

1) Nájdite vektor $\vec{x}$ rovnobežný s vektorom $\vec{a}(2, 1, -1)$, pre ktorý platí: $\vec{x}\,.\,\vec{a} = 3$.

2) Určte vektor $\vec{x}$, ktorého veľkosť je 50, a ktorý je rovnobežný s vektorom $\vec{a}(6; -8; 7{,}5)$.

10.2.1. Vypočítať súradnice stredu úsečky

1) Vypočítajte súradnice stredu úsečky AB, ak

a) $A[-4, 3]$, $B[0, -1]$

b) $A[-2, 4]$, $B[-3, -9]$
c) $A[1/2, 3/2]$, $B[-3/10, -6/10]$
d) $A[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $B[\sqrt{2}, -5\sqrt{3}]$

2) Vypočítajte súradnice stredu úsečky AB, ak platí :
a) $A[3, -4, -1]$, $B[-3, 8, -5]$
b) $A[1/2, 1/4, -3/2]$, $B[-3/2, 3/4, -1/6]$
c) $A[0{,}4; 0{,}25; -0{,}5]$, $B[1/5, -5/4, -1/2]$
d) $A[\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{3}/6]$, $B[-\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{3}/3]$

3) V stredovej súmernosti je obrazom bodu $A[-1/2, 3/5, -17/10]$ bod $A'[1{,}3; -1{,}6; -1{,}8]$. Určte súradnice stredu súmernosti.

4) Dané sú body A, S. Určte súradnice bodu B tak, aby bod S bol stredom úsečky AB.
a) $A[4, -5]$, $S[-3, 2]$
b) $A[1, -1/2]$, $S[1/2, -3/4]$
c) $A[3, -2, 7]$, $S[-1, 2, 3]$
d) $A[-0{,}7; -0{,}8; 0{,}05]$, $S[1/4, -2/5, -7/8]$

5) Trojuholník T_2 má vrcholy v stredoch strán trojuholníka T_1. Určte súradnice vrcholov trojuholníka T_2, ak trojuholník T_1 má vrcholy [1; 6], [–5; 0], [7; –4].

10.2.2 Vypočítať vzdialenosť dvoch bodov

1) Vypočítajte vzdialenosť bodov A, B, ak je dané:
$A[-4, 2]$, $B[-3, 5]$
$A[-1/2, 2]$, $B[0{,}1; 1{,}2]$
$A[1/2, -1, 3]$, $B[2, 1, -3]$
$A[1/2, 3/2, -7/2]$, $B[-0{,}4; 0{,}3; 0{,}1]$

2) Na osi x určte bod tak, aby jeho vzdialenosť od bodu $A[-2, 8]$ bola 10.

3) Na osi x nájdite bod tak, aby mal od bodov $A[-3, 2, 2]$, $B[2, 1, -2]$ rovnakú vzdialenosť.

4) Vypočítajte obsah trojuholníka $K[1; 1]$, $L[2; 3]$, $M[5; -1]$ pomocou tzv. Herónovho vzorca

$$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

kde a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

10.2.3 Vysvetliť pojmy *smerový uhol priamky, smerový* a *normálový vektor priamky, normálový vektor roviny*

1) Určte, či vektory $\vec{v}_1(-3,9), \vec{v}_2(-1,6), \vec{v}_3(1,3), \vec{v}_4\left(\frac{1}{3},-1\right), \vec{v}_5(3,-1)$ sú smerové vektory priamky AB ($A[-2, -3]$, $B[-1, 6]$).

2) Určte číslo p tak, aby vektor $\vec{v}$ bol smerovým (normálovým) vektorom priamky AB.

$A[-1, 1]$, $B[2, 3]$, $\vec{v}(1+p, 2-p)$

$A[2/3, 1]$, $B[-1, -1/3]$, $\vec{v}(2p-1, 2+p)$.

3) Určte smernicu k (smerový uhol α) priamky AB, ak

a) $A[8, 1]$, $B[6, 5]$

$A[1, 3]$, $B[-2, 1]$

4) Určte normálový vektor roviny

$\alpha : x + 2y + 3z - 4 = 0$

$\beta : 3x + y - z - 74 = 0$

$\gamma : x - 3z + 10 = 0$

$d = \{[1-t+s, 2+2t, -1-s]; t \in R, s \in R\}$

$e = ABC\ (A[-1,2,0], B[2,1,3], C[0,3,-2])$

10.2.4 Napísať aspoň jedno analytické vyjadrenie priamky danej dvoma bodmi

1) Napíšte parametrické vyjadrenie (všeobecnú rovnicu, smernicový tvar) priamky, ktorá je určená bodmi A, B.

$A[1, -1]$, $B[2, 3]$ b) $A[2, -3]$, $B[0, 2]$

2) Napíšte parametrické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodmi A, B.

$A[-1, 2, -5]$, $B[3, -2, -4]$

$A[3, 0, 2]$, $B[3, 5, -3]$

$A[1, 0, 0]$, $B[4, -3, 3]$

$A[-7, -6, 4]$, $B[-7, 6, -4]$

3) Napíšte parametrické vyjadrenie (všeobecnú rovnicu) osi úsečky AB, ak

$A[3, -3]$, $B[-1, -2]$

$A[-4, 2]$, $B[5, 2]$

$A[3, -7]$, $B[-1, 5]$

$A[2, 5]$, $B[-3, 9]$

4) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je daná smernicou k a q je úsek, ktorý priamka vytína na osi y.

$k = 3$, $q = -2$

$k = -2$, $q = -5$

$k = -1/2$, $q = 4$

$k = 0$, $q = 7$

5) Určte smernicu priamky $p : y = kx - 1$, ak viete, že prechádza bodom A.

a) $A[1, 3]$ b) $A[-2, 1]$

10.2.5 Opísať súvis medzi smernicovým vyjadrením priamky a lineárnou funkciou

1) Zistite rovnicu lineárnej funkcie, ak jej graf obsahuje body

$A[4, 1]$, $B[1, 4]$
$C[-2, 5]$, $D[2, -5]$
$G[4, 5]$, $H[7, 5]$
$I[-3, -3]$, $J[4, 7]$

2) Zistite, či všetky 3 body môžu patriť grafu tej istej lineárnej funkcie:

$A[2, 5]$, $B[0, 0]$, $C[3, -1]$
$D[-2, 5]$, $E[4, 3]$, $F[1, 4]$
$G[4, 9]$, $H[-4, 1]$, $I[6, 11]$
$J[6, 6]$, $K[4, -1]$, $L[-3, -1]$

3) Dané sú body $A[5, -2]$, $B[1, 6]$.

Napíšte parametrické vyjadrenie priamky AB.
Určte c_2 tak, aby bod $C[-3, c_2]$ ležal na priamke AB.
Určte súradnice bodu S, ktorý je stredom úsečky AB.

U
rčte súradnice takého bodu D ležiaceho na polpriamke AB, ktorého vzdialenosť od bodu A je trikrát väčšia, ako vzdialenosť bodu B od bodu A.

10.2.6 Napísať aspoň jedno analytické vyjadrenie roviny danej tromi bodmi

1) Napíšte parametrické vyjadrenie roviny určenej bodmi

$A[1, 3, -1]$, $B[2, 3, 3]$, $C[-2, -5, -7]$
$A[-1, -1, 0]$, $B[1, 1, 2]$, $C[2, 2, 3]$
$A[2, -3, 5]$, $B[1, 0, -4]$, $C[0, 2, 7]$
$A[1, 1, 0]$, $B[2, 2, 1]$, $C[0, 0, 0]$

2) Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená bodom $A[2, -3, 1]$ a priamkou, ktorá má parametrické vyjadrenie:

$$x = t$$
$$y = 2 + 3t$$
$$z = 1 - t, \; t \text{ Î } R$$

3) Zistite, či body A, B, C ležia na jednej priamke, ak nie, napíšte všeobecnú rovnicu roviny $\leftrightarrow ABC$.

$A[1, 2, -1]$, $B[1, 0, 1]$, $C[2,1, 3]$
$A[1, 1, 2]$, $B[2, 1, -1]$, $C[4, 1, -7]$
$A[1, 0, 3]$, $B[0, 1, -2]$, $C[2, -2, 13]$
$A[1, 1 -3]$, $B[0, 2, 2]$, $C[1, 1, 0]$

10.2.7 Určiť súradnice bodu, ktorý leží (neleží) na danej úsečke, priamke, či v danej rovine

1) Určte druhú súradnicu bodu C tak, aby ležal na priamke AB, pričom $A[3, -1]$, $B[1, 3]$.

$C[1, y]$ b) $C[0, y]$ c) $C[2,5; y]$

2) Zistite, či body $A[-4, 7]$, $B[-7, 8]$, $C[11, 8]$ ležia na priamke MN, ak $M[2, 5]$, $N[-1, 6]$.

3) Rozhodnite, či body $A[1, 2]$, $B[-3, -1]$, $C[-1, 2]$, $D[-17, -22]$ ležia na priamke, ktorá je určená rovnicou $5x - 3y - 6 = 0$.

4) Určte zvyšné súradnice bodov $A[6, y]$, $B[-3, y]$, $C[x, 0]$, $D[x, 1/3]$ tak, ležali na priamke určenej všeobecnou rovnicou $5x - 3y - 6 = 0$.

5) Zistite, či priamka určená parametrickým vyjadrením

$x = 10 - 5t,\ y = -3 + 1{,}5t;\ z = -1 + 2t;\ t \in R$

$x = -4 + t, y = 10 - 2{,}5t;\ z = -6 + 1{,}5t;\ t \in R$

prechádza začiatkom sústavy súradníc.

10.2.8 Zistiť vzájomnú polohu dvoch priamok a určiť ich prienik

1) Zistite vzájomnú polohu priamok $p, q,$ a ak sú rôznobežné, určte aj ich priesečník:

$p:\ x = 2 - 3t, y = 6 + t, z = -t,\ t \in R$

$q:\ x = 1 - 2s, y = 3s, z = 2 + s,\ s \in R$

$p:\ x = 4 - 2t, y = 1 + 3t, z = -5 - 3t,\ t \in R$

$q:\ x = 7 - 7s, y = 2 + 5s, z = -8 - 3s,\ s \in R$

2) Určte, ak existuje, priesečník priamky p a úsečky AB.

$p:\ x = 5 - 3t, y = -6 + 2t,\ t \in R$	$A[3, -8]$, $B[-9, 10]$
$p:\ x = 3 + 4t,\ y = 6 - 6t,\ t \in R$	$A[5, -7]$, $B[3, -4]$
$p:\ x = -7 + 4t, y = 8 - 5t,\ t \in R$	$A[4, -5]$, $B[3, -3]$

3) Zistite, či priamka daná parametrickým vyjadrením

$x = 6 + 2t, y = -11 - 5t, z = 9 + 3t,\ t \in R,$

pretína niektorú súradnicovú os.

4) Napíšte parametrické vyjadrenie všetkých ťažníc trojuholníka s vrcholmi $A[-2, -1]$, $B[3, 0]$, $C[2, 4]$. Určte jeho ťažisko T ako priesečník dvoch ťažníc a overte, že ním prechádza aj tretia ťažnica.

5) Určte hodnotu parametra $c \in$ R tak, aby priamky p a q boli totožné.

$p:\ x = 3 - 2t,\ y = 2 - 5t,\ t \in R$

$q:\ 5x - 2y + c = 0$

10.2.9 Zistiť vzájomnú polohu priamky a roviny a určiť ich priesečník

1) Rozhodnite akú vzájomnú polohu má priamka b a rovina r, ak

r : $x - 5y + 4z - 6 = 0$, b : $x = 2 - t, z = 3t, z = 3 + 4t$, t Î R

r : $3x + y - 3z - 13 = 0$, b : $x = 3 - 2t, y = 1 + 3t, z = -1 - t$, t Î R

2) Dokážte, že priamka AB je rôznobežná s rovinou j. Vyjadrite aj ich priesečník.

$A[3, -2, -1]$, $B[4, 1, 3]$, j : $2x - 3y + z - 2 = 0$

$A[3, -1, 4]$, $B[4, -1, 2]$, $j : 2x - y + 3z - 7 = 0$

3) Určte súradnice priesečníkov roviny $x + 3y - 2z + 6 = 0$ s osami sústavy súradníc.

4) Rozhodnite, akú vzájomnú polohu má rovina r a priamka p, ak poznáme ich parametrické vyjadrenie.

a) $r : x = 1 - 2r + 5s, y = 2 + 3r, z = 4s,$ r, s Î R

$p : x = 4 - 3t, y = 5 - 3t, z = 4 - 4t,$ t Î R

b) $r : 2x + y - z + 1 = 0,$ $p : x = t, y = t, z = 1 + 3t,$ t Î R

c) $r : 2x - y + z - 2 = 0,$ $p : x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = 1,$ t Î R

5) Rovina má parametrické vyjadrenie:

$x = 3 - 3t - 3s, y = -7t, z = 5s,$ t, s Î R

$x = 2t + 2s, y = 6 + 6t,$ $z = 9s,$ t, s Î R

Určte jej priesečníky s osami sústavy súradníc a graficky ju znázornite.

10.2.10 Zistiť vzájomnú polohu dvoch rovín

1) Ukážte, že roviny dané všeobecnými rovnicami

$$5x - 3y + 2z - 5 = 0, \quad 2x - y - z - 1 = 0$$

sú navzájom rôznobežné a zapíšte parametrické vyjadrenie priesečnice týchto rovín.

2) Určte vzájomnú polohu rovín ρ a σ. V prípade, že sú rôznobežné určte ich priesečnicu.

ρ: $2x - 5y + 4z - 10 = 0$, σ: $4x - 10y + 8z - 10 = 0$

ρ: $2x - 5y + 4z - 10 = 0$, σ: $x - y - z - 2 = 0$

ρ: $2x - 5y + 4z - 10 = 0$, σ: $4x - 10y - 2z - 10 = 0$

3) Rozhodnite, akú vzájomnú polohu majú roviny ρ a σ:

a) ρ: $x = 2 + 3u - v, y = 1 - 9u + v, z = -3 - 12u - 2v;$ $u, v \in R$

σ: $x = 1 - 2s + t, y = 2s - 3t, z = 2 - 4s - 4t;$ $s, t \in R$

ρ: $x = 2 + u - v, y = 1 - 3u + v, z = -3 - 4u - 2v;$ $u, v \in R$

σ: $x = 4 - s + t, y = -7 + s - 3t, z = -17 - 2s - 4t;$ $s, t \in R$

4) Pre ktoré hodnoty parametrov $m, n \in R$ sú roviny

σ: $mx - 4y + 3z - 1 = 0$

δ: $-2x + ny - 2z + 9 = 0$

rovnobežné?

5) Určte vzájomnú polohu rovín α a β.

α: $x = 1 + t + s,$ $y = t - s,$ $z = s;$ $t, s \in R$

β: $x - y - 2z - 1 = 0$

10.2.11 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a s danou priamkou je rovnobežná

1) K danej priamke p a bodu A určte všeobecnú rovnicu priamky r, ktorá je rovnobežná s priamkou p a prechádza bodom A.

$p : 3x - y + 1 = 0$, $A[3, -1]$
$p : y = 2x + 3$, $A[1, -2]$
$p : x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \in R$, $A[3, 4]$
$p = MN$, $M[-3, 1]$, $N[4, -1]$, $A[1, 5]$

2) Rozhodnite, či priamka daná všeobecnou rovnicou $7x + 14y + 8 = 0$ je rovnobežná s priamkou AB:

$A[2, 2]$, $B[8, -1]$
$A[-2, -6]$, $B[4, -9]$

3) Napíšte parametrické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom C rovnobežne s priamkou AB:

$A[1, 1]$, $B[2, -3]$, $C[1, 5]$
$A[-1, 1]$, $B[2, -3]$, $C[1, 5]$

4) Určte parametrické rovnice priamky p, ktorá prechádza bodom $M[2, -1, 3]$ a je rovnobežná s priamkou $q : x = 1 - 2s$, $y = 3 + s$, $z = 3s$, $s \in R$.

5) Napíšte smernicový tvar priamky q, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s priamkou p:

$A[3, 1]$, $p : y = 3x - 1$
$A[4, -1]$, $p : y = -0{,}5x + 3$

10.2.12 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a na danú priamku je kolmá

1) Napíšte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na vektor $\vec{n}$:

$A[5, 4]$, $\vec{n}(3, 2)$
$A[4, -3]$, $\vec{n}(-2, 5)$

2) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na priamku BC, ak je:

$A[1, -4]$, $B[3, -7]$, $C[3, 2]$
$A[0, 6]$, $B[0, -2]$, $C[-3, -5]$

3) Napíšte rovnice priamok, na ktorých ležia výšky trojuholníka ABC:

$A[5, 2]$, $B[1, 5]$, $C[-2, 1]$
$A[7, 8]$, $B[5, -2]$, $C[-3, -6]$

4) Napíšte rovnicu roviny, ktorá je kolmá na úsečku AB a prechádza jej stredom:

$A[1, 2, 3]$, $B[3, -2, -5]$

5) Napíšte smernicový tvar rovnice priamky, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na priamku p .

$A[4,3]$, $p : y = 2x + 1$

$A[6, 1]$, p : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$

$A[2, -\sqrt{2}\,]$, p : $y = x\sqrt{2} - 3$

$A[1; -2]$, $p : 4x - 3y + 15 = 0$

10.2.13 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a s danou rovinou je rovnobežná

1) Určte rovnice všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom P a sú rovnobežné s rovinou b.

$P[2, 2, 1]$, $b : 4x - 2y - 2z + 1 = 0$

$P[3, 1, -12]$, b ={ [2 + t, –t + 2s, 3 – 5t – 10s]; t, s Î R}

2) Určte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom P a je rovnobežná s rovinou b.

$P[2, 1, 3]$, $b : 2x + y - z + 1 = 0$

$P[8, -6, 0]$, $b : 3x - 5y - z - 2 = 0$

3) Daná je priamka $p : x = 1 + t$, $y = 2 + at$, $z = 4$, t Î R. Určte a Î R tak, aby bola priamka p rovnobežná s rovinou $d : x + ay + 5z - 1 = 0$.

10.2.14 Určiť analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza daným bodom a na danú rovinu je kolmá

1) Určte súradnice päty P kolmice vedenej bodom $A[2, 0, 3]$ na rovinu $\rho : x - 3y + 5z + 18 = 0$.

2) Bodom $A[2, -1, 2\,]$ veďte priamku kolmú na rovinu α a určte jej priesečník s touto rovinou.

$\alpha : x - y + z + 13 = 0$

$\alpha : x - y = 0$

$\alpha : 6x + 17y - 23z + 51 = 0$

3) Určte súradnice päty P kolmice vedenej bodom $A[2, 0, 3]$ na rovinu $\lambda : x - 3y + 5z + 18 = 0$.

4) Daná je priamka $p = \{[t, 1 - t, 2t];\ t \in R\}$ a bod $M[1, 0, 5]$. Určte spoločný bod priamky p a roviny λ, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku p.

10.2.15 Určiť analytické vyjadrenie roviny, ktorá prechádza daným bodom a s danou rovinou je rovnobežná

1) Overte, že roviny ρ a σ sú rovnobežné :

$\rho : x = 2s,\ y = 2r,\ z = 2 - r - s, \quad r, s \in \mathrm{R}$

$\sigma : x = 1 - u - 2v,\ y = u,\ z = v, \quad u, v \in \mathrm{R}$.

2) Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou α a prechádza bodom A:

$A[-3, 1, 2]$, $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$
$A[6, -9, 12]$, $\alpha: x - 7y + 3z - 19 = 0$
$A[4, 1, 1]$, $\alpha: 2x - y - z + 4 = 0$

3) Určte rovinu, v ktorej leží bod $N[1; 2; 3]$ a ktorá je rovnobežná s rovinou určenou súradnicovými osami x a z.

-

4) Rovina, ktorá prechádza bodom $A[1; -2; 3]$ a je rovnobežná s rovinou $3x - 2y + z - 15 = 0$ má rovnicu:

A $3x - 2y + z - 2 = 0$

B $x - 2y + 3z - 14 = 0$

C $2x - y - 8z + 18 = 0$

D $3x - 2y + z - 10 = 0$

5) Napíšte rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou $s: 2x - y + z - 1 = 0$ a prechádza bodom $A[-3, 1, 2]$.

10.2.16 Vypočítať vzdialenosť bodu od priamky (v rovine)

1) Vypočítajte vzdialenosť bodu $B[3, -7]$ od priamky danej rovnicou $4x - 3y + 7 = 0$.

2) Daný je trojuholník ABC, $A[1, 1]$, $B[3, 2]$, $C[2, 3]$. Napíšte rovnicu ťažnice t_a a vypočítajte vzdialenosť bodov B a C od t_a.

3) Určte najkratšiu vzdialenosť priamok $3x - 4y - 8 = 0$ a $3x - 4y + 7 = 0$.

4) Určte polomer kružnice so stredom $S[1; -2]$, ktorá sa dotýka priamky $6y - 8x - 30 = 0$.

10.2.17 Vypočítať odchýlku dvoch priamok

1) Zistite odchýlku priamok $p: x - 3 = 0$, $q: x\sqrt{3} - y + 5 = 0$.

2) Určte odchýlku priamok a, b:

$a: x = -2 + 3t, y = 1, z = 3 - t, \ t \in R$
$b: x = -1 + 2s, y = 0, z = -3 + s, \ s \in R$
$a: x = 2 + 3t, y = -4t, z = 12t, \ t \in R$
$b = AB, A[0, -3, -1], B[1, -6, 0]$
$a: x = 1 - t, y = 2 + 2t, z = t, \ t \in R$
b je totožná s osou z.

3) Bodom M [1, 3] veďte priamku, ktorá zviera s priamkou $p: 4y - 5 = 0$ uhol veľkosti 45°.

4) Vypočítajte odchýlku priamok m a n.

m: $3x + 5y + 1 = 0$

n: $2x - 8y + 3 = 0$

10.2.18 Vypočítať odchýlku dvoch rovín

1) Vypočítajte odchýlku rovín α, β.

$\alpha : x + y - 2z - 5 = 0$, $\beta : x - 2y - z + 3 = 0$

$\alpha : 3x - 4y + z - 6 = 0$, $\beta : 2x + y - 2z + 1 = 0$

$\alpha : 3x + 4y - 5z = 0$, $\beta : 4x - 5z + 3z + 2 = 0$

2) Vypočítajte odchýlku dvoch rovín α, β, ak
$\alpha : 3x + 5 = 0$, $\beta : x = 3 + r - 2s$, $y = 2 - r + 2s$, $z = -1 - 4r$, $r, s \in R$

3) Daný je kváder $ABCDEFGH$, $D[0, 0, 0]$, $A[4, 0, 0]$, $C[0, 3, 0]$, $H[0, 0, 5]$. Určte odchýlku:

a) priamky DF od roviny BEG,
b) rovín BEG a ABC.

10.2.19 Vypočítať vzdialenosť bodu od roviny

1) Vypočítajte vzdialenosť bodu A od roviny ρ, ak

$A[3, 5, -6]$, $\rho : 2x - 2y + z - 8 = 0$

$A[-1, 3, 2]$, $\rho : 3x - 4y + 5z + 15 = 0$

$A[-7, 0, -1]$, $\rho : 4x + 12y - 3z - 1 = 0$.

2) Určte vzdialenosť bodu M od roviny r, ak $M[-7, 3, 1]$ a rovina r je určená bodmi $A[1, 0, 1]$, $B[2, 2, 1]$, $C[0, 0, 2]$.

3) Dané sú body $A[1, -2, -2]$, $B[2, -1, -1]$, $C[1, -1, -2]$, $D[0, 2, -2]$.

Vypočítajte vzdialenosť bodu D od roviny ABC.

Nájdite obraz bodu D v osovej súmernosti podľa osi AB.

4) Určte súradnice päty P kolmice vedenej bodom $A[2, 0, 3]$ kolmo na rovinu $r : x - 3y + 5z + 18 = 0$. Vypočítajte vzdialenosť PA.

5) Napíšte rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou $x + y + z - 6 = 0$ a od začiatku súradnicovej sústavy má vzdialenosť $d = \sqrt{3}$.

10.2.20 Vypočítať odchýlku priamky od roviny

-

1) Aký uhol zviera priamka

$p : x = 1 - 3t$, $y = 2 - 4t$, $z = 3 + t$, $t \in R$

a rovina

$f : 2x - y + 2z - 6 = 0$?

2) Aký uhol zviera priamka

$p: x = 4 + t, y = 7 - 8t, z = -11 + 3t, \; t \in R$

a rovina ABC

$A[2, 2, 1], B[0, 1, -1], C[1, 3, 4]$?

3) Určte odchýlku priamky p a roviny b.

$p: x = t, y = t, z = 1 + 3t, \; t \in R,$ $\qquad b: 2x + y - z + 1 = 0$

$p: x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = 3 - t, \; t \in R,$ $\qquad b: 3x - y + z + 1 = 0$

$p: x = 2 - t, y = 2 + 3t, z = 1, \; t \in R,$ $\qquad b: 2x - y - z - 2 = 0$

$p = AB$, kde $A[8, -6, 2], B[12, -9, 1],$ $\qquad b: 3x - 5y - z - 2 = 0$

10.3.1 Napísať analytické vyjadrenie kružnice danej stredom a polomerom

1) Napíšte rovnicu kružnice so stredom $S[\sqrt{2}, -1]$ a polomerom $r = \sqrt{3}$. Zistite, či na nej leží bod $A[2\sqrt{2}, 0]$.

2) Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má stred $S[6, 7]$ a prechádza bodom $A[0, 9]$.

3) Napíšte rovnicu kružnice, ktorej
   a) priemerom je úsečka AB, $A[0, 7]$, $B[4, 1]$,
   b) priemer tvoria body $A[-3; 0]$ a $B[3; 6]$.

4) Určte súradnice priesečníkov kružnice $k(S, r)$
   a) $S[5, 2], \; r = 7$ $\qquad$ b) $S[-\frac{3}{2}, -4], r = 2{,}5$
   so súradnicovými osami.

5) Napíšte rovnice všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú súradnicových osí a prechádzajú bodom
   a) $P[1, 2]$ $\qquad$ b) $R[6, 6]$ $\qquad$ c) $T[0, 5]$

10.3.2 Určiť charakteristické prvky kružnice z jej analytického vyjadrenia

1) Zistite, či nasledujúce rovnice sú rovnicami kružníc. V kladnom prípade určte stred i polomer a kružnice načrtnite.
   a) $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 6 = 0$ $\qquad$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$ $\qquad$ d) $2x^2 + 2y^2 - 6y - 3 = 0$

2) Akú rovnicu má stredná (spojnica stredov) kružníc $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 25 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 23$?

3) Aká je dlhá tetiva kružnice $5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$, ak ju bod $P[1, \frac{1}{2}]$ rozpoľuje?

4) Určte najmenšiu vzdialenosť bodu $P[-7, 2]$ od kružnice $k: x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

5) Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží priemer kružnice $k: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, ktorý je kolmý na priamku $p: 5x + 2y - 13 = 0$.

10.3.3. Klasifikovať analytickou metódou vzájomnú polohu priamky a kružnice

1) Ktorá kružnica so stredom $S[5, 4]$ sa dotýka priamky $3x + 2y - 10 = 0$?

2) Nájdite spoločné body kružnice danej rovnicou $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ a priamky $p: 2x - y - 8 = 0$.

3) Napíšte rovnicu priamky p, na ktorej leží tá tetiva kružnice k, ktorú rozpoľuje bod M.

$k: (x-3)^2 + (y-7)^2 = 169$, $M\left[\frac{17}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

4) Pre ktoré hodnoty parametra $q \in R$ je priamka $y = x + q$ dotyčnicou kružnice

$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 53 = 0$?

5) Určte vzájomnú polohu:

a) priamky $x = 1 + 3t$, $y = -2 + 4t$, $t \in R$ a kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,

b) priamky $x = 1 - 4t$, $y = -2 + 3t$, $t \in R$ a kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

10.3.4 Určiť rovnicu dotyčnice kružnice v jej ľubovoľnom bode.

1) Napíšte rovnicu dotyčnice kružnice k v danom bode A.

$k: x^2 + y^2 = 25$, $A[3, 4]$

$k: x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$, $A[3, 3]$

2) Určte dotyčnicu kružnice k v jej bode T.

$k: x^2 + y^2 = 25$, $T[x, -4]$

$k: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$, $T[-4, y]$

3) Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $x^2 + y^2 = 13$, ktoré sa jej dotýkajú v jej priesečníkoch s priamkou $x - 5y + 13 = 0$.

10.3.5 Určiť rovnicu dotyčnice kružnice prechádzajúcu bodom mimo kružnice

Určte body dotyku dotyčníc vedených bodom $O[0, 0]$ ku kružnici, ktorá je daná rovnicou $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 49 = 0$.

2) Z bodu $A[4, 2]$ sú vedené dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 = 10$. Určte uhol, ktorý zvierajú .

Určte rovnice dotyčníc ku krivke $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, ktoré prechádzajú bodom $W[9, 2]$.

4) Určte rovnice dotyčníc ku krivke $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$, ktoré sú rovnobežné s priamkou AB, $A[0, -7]$, $B[4, 1]$.

10.3.6 Určiť rovnicu kružnice opísanej danému trojuholníku

1) Napíšte rovnicu kružnice, ktorá je opísaná trojuholníku ABC, ak $A[2, 1]$, $B[3, 0]$, $C[0, 5]$. Určte jej polomer a stred.

2) Napíšte rovnicu kružnice, ktorá je opísaná trojuholníku ABC, ak
$A[2, 1]$, $B[1, 4]$, $C[6, 9]$
$A[-1, 3]$, $B[0, 2]$, $C[-1, -1]$

11. Kombinatorika

11.1 Riešiť jednoduché kombinatorické úlohy systematickým vypísaním všetkých možností s využitím vhodného organizačného princípu

1) Napíšte všetky prirodzené čísla väčšie než 23 a menšie než 123, ktoré sú vytvorené z číslic 0, 1, 2, 3, 5, 9. Číslice sa však v žiadnom čísle nesmú opakovať.

2) U Našinca predávali päť druhov zmrzliny: citrónovú, jahodovú, malinovú, orieškovú a pistáciovú. Cestou z výletu sa U Našinca zastavila trieda s posilneným vyučovaním matematiky. Časť žiakov si dala trojitú zmrzlinu, časť dvojitú a zvyšní žiaci si kúpili iba jeden kopček zmrzliny. Dohodli sa však, že žiadna dvojica nebude mať rovnakú zmrzlinu (rozlišujúc počet kopčekov zmrzliny a druh objednanej zmrzliny). Koľko žiakov z triedy bolo na výlete, ak vieme, že žiaci svojimi objednávkami vyčerpali všetky možnosti dennej ponuky zmrzliny U Našinca? Vypíšte všetky objednané zmrzliny.

3) Koľko rôznych súčtov s tromi sčítancami možno utvoriť z čísel 2, 3, 7, 23, ak sa každý sčítanec môže až trikrát opakovať?

4) Koľko uhlopriečok má vypuklý (konvexný) desaťuholník?

5) Koľko rôznych prirodzených šesťciferných čísel možno zostaviť z číslic 4, 5, ak sa má v každom z nich vyskytovať cifra 4 práve štyrikrát?

6) Na policu chceme uložiť vedľa seba do radu 6 kníh, z ktorých 3 sú (rôzne) encyklopédie. Koľkými rôznymi spôsobmi to môžeme urobiť, ak chceme, aby všetky tri encyklopédie boli vedľa seba?

11.2 Riešiť zložitejšie kombinatorické úlohy rozložením na jednoduchšie podúlohy využitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu, či pomocou základných vzorcov pre počet variácií, permutácií a kombinácií

1) Automatická ústredňa SAV má teoreticky k dispozícii telefónne čísla začínajúce trojcifernou predvoľbou (prvá číslica nesmie byť nula), za ktorou nasledujú štvorciferné klapky. Koľko telefónnych aparátov so samostatným číslom sa teoreticky dá napojiť na takúto ústredňu?

2) Koľkými spôsobmi možno z 12 kandidátov vybrať štvorčlenné mužstvo?

3) Koľko rôznych 5-ciferných čísel možno vytvoriť v sedmičkovej pozičnej číselnej sústave?

4) V tajnej abecede trojprstých sú tri znaky: O, X, Δ. Koľko rôznych päťhláskových slov môžu napísať?

5) V istej krajine pozostávajú poznávacie značky áut z kombinácie troch písmen a troch číslic (napr. CLV 186, XFX 997). Používa sa 26 písmen a číslice 1 až 9 (0 sa nepoužíva). Koľko rôznych poznávacích značiek môžu v tejto krajine vydať?

6) Určte postup, ktorým zistíme, koľkými rôznymi spôsobmi môžeme rozdeliť 8 chlapcov a 4 dievčatá na dve šesťčlenné volejbalové družstvá tak, aby v každom družstve bolo aspoň jedno dievča.

7) Prirodzené číslo nazývame *pozoruhodným*, ak má súčasne týchto päť vlastností:

V1: je päťciferné,

V2: je väčšie ako 20 000,

V3: je deliteľné piatimi,

V4: neobsahuje číslice 0, 4, 7, 9,

V5: všetky jeho číslice sú navzájom rôzne.

Koľko je všetkých pozoruhodných prirodzených čísel?

8) Písomná skúška pozostáva z desiatich úloh, pričom každý študent má riešiť iba päť úloh podľa vlastného výberu. Vybrať si však musí dve úlohy z úloh 1.- 4. a tri úlohy spomedzi úloh 5.-10. Na poradí, v ktorom úlohy rieši, nezáleží. Koľkými rôznymi spôsobmi si študent môže vybrať úlohy, ktoré bude riešiť?

9) Koľko existuje štvorciferných prirodzených čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne?

11.3 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *permutácie, variácie* (aj s opakovaním) a *kombinácie*

1) V každom kole SAZKY sa tipujú výsledky 13 zápasov, pričom pri každom zápase možno vsadiť na výhru domácich, výhru hostí alebo na nerozhodný výsledok. Koľkými rôznymi spôsobmi možno pri takomto tipovaní vyplniť tiket?

2) S pripomienkami k návrhu novely zákona chce v parlamente vystúpiť šesť poslancov - *A*, *B*, *C*, *D*, *E* a *F*. Určte počet:
   všetkých možných poradí ich vystúpení,
   všetkých poradí, v ktorých vystupuje *A* po *E*,
   všetkých poradí, v ktorých vystupuje *A* ihneď po *E*.

3) Určte, koľkými spôsobmi sa dá vybrať na šachovnici 8 x 8
   trojica políčok,
   trojica políčok neležiacich v jednom stĺpci,
   trojica políčok neležiacich v jednom stĺpci ani v jednom riadku,
   trojica políčok, ktoré nie sú rovnakej farby.

4) V rovine je *n* bodov, z ktorých *p* leží na jednej priamke. Okrem nich už žiadne tri body na jednej priamke neležia.Určte, koľko
   priamok,
   trojuholníkov,
   kružníc,
   je určených týmito bodmi.

5) Apolloniovou úlohou nazývame úlohu zostrojiť kružnicu, ktorá má tri z nasledujúcich vlastností: prechádza daným bodom, dotýka sa danej priamky, dotýka sa danej kružnice. (Ak označíme tieto vlastnosti písmenami *B, p, k*, môžeme každú Apolloniovu úlohu označiť trojicou vytvorenou z týchto písmen. Napríklad úloha *Bpp* označuje úlohu zostrojiť kružnicu prechádzajúcu daným bodom a dotýkajúcu sa dvoch daných priamok.) Určte počet všetkých Apollóniovych úloh.

6) Koľko rôznych slov sa dá utvoriť zo slova *EKONOMIKA* zmenou poradia písmen? (Slová nemusia mať význam. Počítajte aj slovo *EKONOMIKA*.)

7) Vo vrecku je 6 rovnakých lístkov označených číslami 1 až 6. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme postupne (s prihliadnutím na poradie) vybrať 3 z nich, ak sa vybrané lístky do vrecka vracajú?

11.4 Vysvetliť spôsob vyjadrenia počtu permutácií, variácii a kombinácií pomocou faktoriálov

1) Vyjadrite číslo $V_k(n) = n.(n - 1).(n - 2). \dots .(n - k + 1)$ pomocou faktoriálov.

2) Vyjadrite číslo $C_k(n) = \dfrac{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1)}{k.(k-1).(k-2).\dots.2.1}$ pomocou faktoriálov.

3) Porovnajte čísla *a, b*, ak $a = 50! + 53!$, $b = 51! + 52!$

4) Riešte rovnicu $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 72$, kde $n \in N$.

5) Upravte výraz $\dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} - \dfrac{(n+2)!}{(n+3)!} - \dfrac{n!}{(n+3)!}$, $n \in N$

6) Riešte nerovnicu $\dfrac{(x+1)!}{2.(x-1)!} < 0$

11.5 Vyčísliť hodnotu konkrétneho kombinačného čísla buď priamo z definície alebo pomocou vlastností Pascalovho trojuholníka

1) Ak $n, k \in N,\ n > k \geq 2$, tak $\dbinom{n}{k} - \dbinom{n-1}{k-1} =$

2) Zapíšte jedným kombinačným číslom:

a) $\dbinom{10}{4} + \dbinom{10}{5}$ b) $\dbinom{13}{2} + \dbinom{13}{10}$ c) $\dbinom{20}{7} + \dbinom{20}{8}$

d) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$ e) $\binom{x}{2}+\binom{x}{x-3}$ f) $\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-1}{x-1}$

3) Dokážte, že pre všetky $n\in N$ platí rovnosť $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$

4) Riešte nerovnicu $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{2}+\binom{x+6}{2}<0$

5) Napíšte piaty riadok Pascalovho trojuholníka.

11.6. Sformulovať a aktívne ovládať binomickú vetu

1) Umocnite výraz:

a) $(1 + x)^7$ b) $(a - 2)^5$ c) $(x + y)^4$

d) $(a - b)^7$ e) $(2h - k)^5$ f) $(2 + p^2)^6$

g) $\left(\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^4$

2) Nájdite dané členy v nasledujúcich rozvojoch:

a) $(1 + x)^{10}$, *5-ty člen,* b) $(2a + b)^{12}$, *10-ty člen,*

c) $\left(5x^3-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$, *10-ty člen,* d) $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$, *7-my člen.*

3) Určte absolútny člen (čiže člen neobsahujúci premennú x) binomického rozvoja dvojčlena:

a) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)^{12}$ b) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$.

4) Aký je koeficient pri x^2 v binomickom rozvoji dvojčlena $\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$?

5) Pre aké x v rozvoji výrazu $\left(x-\sqrt{2}\right)^7$ sa tretí člen rovná -42?

12. Štatistika a pravdepodobnosť

12.1 Charakterizovať na konkrétnych príkladoch pojmy *štatistický súbor, štatistická jednotka* a *znak*. Určiť rozsah daného štatistického súboru.

1) Akými rôznymi spôsobmi možno celok, ktorí tvorí obyvateľstvo SR, rozdeliť na jednotky? Jednotkou tu môže byť napr. rodina. Vymenujte ďalšie možné jednotky, ktoré sú buď menšie alebo väčšie než rodina.

2) Aké znaky by ste zvolili pri pri prieskume kultúrnych (alebo technických) záujmov žiakov? Každý takýto znak bude určený vhodne formulovanou otázkou, ako napr.: Chodíte aspoň raz mesačne do divadla? Ktoré literárne časopisy čítate? a pod. Určte iné takéto znaky a vypíšte hodnoty, ktoré môžu nadobudnúť.

3) V súbore, ktorého jednotkami sú žiaci vašej triedy, urobte štatistický výskum, určte rozsah tohto súboru a zistite hodnoty týchto znakov: známka z matematiky pri poslednej klasifikácii, výška postavy, váha (hmotnosť), nosí okuliare (áno - nie).

4) Vláda na svojom zasadnutí prerokovala štatistiku dopravných nehôd na cestách SR v 4. štvrťroku roku 1996. Charakterizujte na tomto príklade pojmy *štatistický súbor, štatistická jednotka* a *znak*. Určte aj niekoľko konkrétnych znakov, ktoré sa v tejto štatistike môžu vyskytovať.

5) V istej škole sa zisťovalo, koľko žiakov navštevuje vyučovanie anglického, nemeckého a ruského jazyka. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke.

jazyk	A	N	R
počet žiakov	176	105	39

Určte rozsah tohto súboru i jeho znaky.

12.2 Vykonať triedenie štatistického súboru podľa daného znaku. Určiť absolútne a relatívne početnosti znakov (tried) a zostaviť tabuľku početnosti. Graficky znázorniť rozdelenie početnosti

1) Slabiky slovenského jazyka sú foneticky rozlišované podľa toho, ako sú v nich uložené vedľa seba samohlásky a spoluhlásky. Jednotlivé druhy slabík sa označujú symbolmi

ba, bba, bab, bbab, a, ...,

kde písmeno *a* zastupuje ľubovoľnú samohlásku a písmeno *b* ľubovoľnú spoluhlásku.

V nasledujúcej tabuľke je uvedené rozdelenenie početností v súbore slabík vybratých z veršov básnikov Hrubína, Halasa a Nezvala a roztriedených podľa fonetického typu.

Druh slabiky	Početnosť
ba	686

bba	213
bab	175
bbab	66
a	52
bbba	30
ab	10
bbbab	7
babb	6
bbabb	2
bbbbab	2
bbbbab	1

Určte rozsah tohto súboru a relatívne početnosti jednotlivých znakov (tried). Rozdelenie početnosti znázornite graficky.

2) V tabuľke je uvedené rozdelenie početností žiakov v jednej triede podľa prospechu.

Prospech	Početnosť
Prospel s vyznamenaním	7
Prospel bez vyznamenania	14
Neprospel	3
Nebol klasifikovaný	1

Určte rozsah tohto súboru a relatívne početnosti jednotlivých znakov (tried). Rozdelenie početnosti znázornite graficky.

3) V tabuľke je uvedené rozdelenie početností žiakov v jednej triede podľa známky z matematiky.

Známka	Početnosť
1	5
2	13
3	17
4	6
5	2

Určte rozsah tohto súboru a relatívne početnosti jednotlivých znakov (tried). Rozdelenie početnosti znázornite graficky.

4) Pri zisťovaní veku poslucháčov jednej študijnej skupiny na vysokej škole boli zistené tieto hodnoty: 18, 19, 18, 18, 19, 18, 20, 21, 20, 21, 22, 22, 18, 18, 18, 19, 19, 18, 19, 20. Určte rozsah súboru, zostavte tabuľku rozdelenia početnosti jednotlivých hodnôt znaku "vek" a určte relatívnu početnosť pre hodnotu 18. Rozdelenie početnosti znázornite graficky.

5) V predajni pánskej obuvi zaznamenávali veľkosti predaných párov počas dňa s týmto výsledkom: 41, 41, 41, 42, 42, 41, 39, 41, 37, 41, 45, 41, 42, 38, 40, 39, 38, 41, 41, 38, 42, 39, 44, 43, 43, 44, 39, 39, 43, 43, 40, 42, 43, 41, 41, 43, 40, 40, 40, 42, 42, 42, 41, 40, 42. Určte rozsah súboru, absolútne a relatívne početnosti znaku "veľkosť". Relatívnu početnosť vyjadrite aj v percentách. Rozdelenie početnosti znázornite graficky.

12.3 Vypočítať priemer, vážený priemer, modus, medián, rozptyl a smerodajnú odchýlku. Určiť geometrický priemer

1) Výkon gymnastky na bradlách ohodnotilo 5 rozhodcov týmito známkami: 9,1; 9,5; 8,9; 9,2; 9,2. Aké je jej priemerné hodnotenie vypočítané z troch prostredných známok (najvyššia a najnižšia známka sa do hodnotenia nezapočítáva)?

2) Súborom je 20 členov družstva, znakom ich ročný príjem (v tisícoch Sk), rozdelenie početností je v tabuľke. Určte priemerný mesačný príjem člena družstva, modus a medián.

ročný príjem	30	40	50	60	70	84
početnosti	1	6	6	5	1	1

3) Určte geometrický priemer čísel:

a) 2, 9, 12

b) 25, 8, 10, 5

4) Priemerný výnos ovsa z 1 ha pozemku v podhorskej oblasti je na pozemku 1. druhu 2,2 t, na pozemku 2. druhu 2,1 t a na pozemku 3. druhu 2 t.

a) Určte priemerný výnos zo všetkých troch pozemkov, ak majú rovnakú rozlohu.

b) Aký bude priemerný výnos, ak 150 ha pozemkov je 1. druhu, 80 ha 2. druhu a 20 ha 3. druhu?

5) Pri príprave čajovej zmesi zmiešali 5 kg čaju v cene 150 Sk za kilogram a 15 kg čaju po 90 Sk za kilogram. Aká by mala byť cena 1 kg zmesi?

6) Určte priemerný obsah AgBr (v percentách) vo fotografických roztokoch a vypočítajte smerodajnú odchýlku. Obsah AgBr v 8 kontrolných roztokoch je v tabuľke:

Číslo roztoku	1	2	3	4	5	6	7	8

Obsah AgBr v %	38,25	40,42	40,35	38,62	37,10	40,55	37,23	39,84

12.4 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch obsah pojmov *náhodný jav, istý jav, nemožný jav, opačný jav*

1) Z triedy s 28 žiakmi majú byť lósom určení 4 žiaci, ktorí sa podrobia istému psychologickému testu. Určte počet možných výsledkov losovania.

2) V rodinách s 3 deťmi zisťujeme pohlavie detí. Vymenujte všetky možné výsledky, ak záleží na poradí detí podľa veku.

3) Hádžeme trikrát 2 Sk mincou. Vymenujte výsledky priaznivé nasledujúcim javom:

A "padne práve raz Venuša"

B "padne najviac raz znak SR"

C "padne trikrát tá istá strana mince"

D "padne aspoň dvakrát znak SR"

Ktoré javy sa navzájom vylučujú? Určte opačný jav k javu D.

4) Študent si má vytiahnuť 3 z 10 otázok. Je pripravený odpovedať na 5 otázok. Aký je počet všetkých priaznivých výsledkov javu

a) **A** - "študent si vytiahne práve jednu otázku, ktorú vie",

b) **B** - "študent si nevytiahne ani jednu otázku, ktorú vie".

5) Pre ľubovoľné javy A, B vyjadrite množinovou symbolikou, že:

a) nastali oba javy

b) nastal práve jeden z týchto javov

c) nenastal žiadny jav

d) nastal najviac jeden z týchto javov

e) nastal aspoň jeden z týchto javov

6) Náhodne vybraný výrobok môže byť prvej, druhej alebo tretej akosti. Označme javy:

A - vybraný výrobok je 1. akosti

B - vybraný výrobok je 2. akosti

C - vybraný výrobok je 3. akosti

Interpretujte (slovami opíšte) javy:

a) $A \cup B$ b) $(A \cup C)'$ c) $(A \cap B) \cup C$

12.5 Aplikovať základný vzorec na výpočet pravdepodobnosti pre javy, ktorých počet je možné určiť jednoduchým výpočtom alebo kombinatorickou úvahou

1) Zo 100 súčiastok, medzi ktorými je 15 nepodarkov, vyberáme na kontrolu 10. Ukázalo sa, že prvých 8 vybraných súčiastok bolo kvalitných. Aká je pravdepodobnosť, že aj deviata súčiastka bude kvalitná?

2) V zozname detí narodených v pôrodnici v Modre bolo uvedených 21 chlapcov a 19 dievčat. Aká je pravdepodobnosť, že na prvých piatich miestach tohto zoznamu budú:

a) len dievčatá,

b) dvaja chlapci a tri dievčatá,

d) aspoň traja chlapci?

3) Hádžeme dvoma kockami, bielou a čiernou.

a) Aká je pravdepodobnosť javu "padne súčet 7"?

b) Aká je pravdepodobnosť javu "padne súčet 11"?

4) 40 študentov budeme testovať a máme ich náhodne rozdeliť na 4 rovnako početné skupiny. Medzi študentami je aj Katka a Matej. Aká je pravdepodobnosť, že budú zaradení do tej istej skupiny?

5) Je pri hode 3 kockami pravdepodobnejší súčet 11 (jav A), či súčet 12 (jav B)?

6) Strelec strieľa so spoľahlivosťou (čiže s pravdepodobnosťou zásahu) 0,9. Aká je pravdepodobnosť, že prvou ranou nezasiahne cieľ?

ODPORÚČANIA NA VYUŽITIE VZDELÁVACIEHO ŠTANDARDU

Ak majú vzdelávacie štandardy z matematiky pre gymnáziá patriť medzi základné pedagogické dokumenty, slúžiace spolu s učebným plánom a učebnými osnovami na riadenie a reguláciu výchovy a vzdelávania v učebnom predmete matematika, tak by ich mali poznať a uplatňovať nielen učitelia a vedenia jednotlivých škôl, ale aj učitelia základných škôl, metodici a inšpektori, rodičia a žiaci, autori učebníc, učebných pomôcok a prostriedkov na meranie prírastku vedomostí a zručností i potencionálni odberatelia absolventov gymnázií – vysoké školy.

Učitelia a predmetové komisie matematiky by mali využívať vzdelávací štandard spolu s učebnými osnovami pri vypracovaní tematického plánu, tematických a štvrťročných písomných skúšok i pri stanovovaní cieľov vyučovania matematiky. Mal by byť východiskom pri navrhovaní rozsahu vyučovania matematiky v jednotlivých školách i pri výbere metód, prostriedkov a organizačných foriem vyučovania.

Vzdelávací štandard by mal byť aj východiskom kontrolnej činnosti vedenia školy a inšpekčných orgánov, mal by byť návodom v prijímacom pokračovaní na vysoké školy a zároveň by mal poskytnúť žiakom a ich rodičom základnú informáciu o tom, do akej šírky a hĺbky si majú žiaci osvojiť učivo jednotlivých tematických celkov.

Kritériom hodnotenia správnosti a účelnosti zvolených vzdelávacích programov a špecifických cieľov jednotlivých škôl, by malo byť zvládnutie štandardu na primeranej úrovni väčšinou žiakov školy.